Carlo Sintini

Matematica ? … No problem !!!

Tutta la matematica di base
per i licei e il biennio universitario

Matematicamente

Carlo Sintini

Matematica ? … No problem !!!

www.matematicamente.it – libri@matematicamente.it

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

ISBN 978 88 96354 08 7

A mio nipote Samuele

INDICE

INTRODUZIONE 8

CAP. 1 - PREMESSE 9

Par. 1 - Proprietà delle potenze 9

Par. 2 - Proprietà dei radicali 10

Par. 3 - I prodotti notevoli 12

Par. 4 - Varie 13

Par. 5 – Le categorie numeriche 14

Par. 6 - Gli intervalli 19

Par. 7 - Le disuguaglianze e le disequazioni 22

Par. 8 - Le espressioni con modulo 30

CAP. 2 - GRAFICI, SIMMETRIE E TRASLAZIONI 34

Par. 1 - I grafici nel piano cartesiano 34

Par. 2 - Il dominio 40

Par. 3 - Le simmetrie 44

Par. 4 - Le costanti additive e moltiplicative 48

Par. 5 - Le traslazioni 52

CAP. 3 - TRIGONOMETRIA 55

Par. 1 - La misura degli angoli in quadranti 55

Par. 2 - Le funzioni trigonometriche 58

Par. 3 - Le relazioni fondamentali 62

Par. 4 - Gli angoli notevoli 68

Par. 5 - La riduzione al primo quadrante 73

Par. 6 - Alcune formule importanti 75

Par. 7 - Le equazioni e disequazioni trigonometriche 79

CAP. 4 - LOGARITMI ED ESPONENZIALI 86

Par. 1 - La definizione di logaritmo 86

Par. 2 - Le equazioni esponenziali 87

Par. 3 - Le equazioni logaritmiche 89

Par. 4 - La funzione esponenziale *90*
Par. 5 - La funzione logaritmica *92*
Par. 6 - Le proprietà dei logaritmi *95*
CAP. 5 - GEOMETRIA ANALITICA 100
Par. 1 - Prime formule *100*
Punto medio fra due punti 100
Distanza fra due punti 100
Equazione retta passante per due punti 101
Par. 2 - Equazione della retta *102*
Par. 3 - Ancora sulle rette *105*
Fasci di rette 105
Parallelismo e perpendicolarità fra rette 106
Distanza di un punto da una retta 108
Angolo fra due rette 108
Par. 4 - La circonferenza *109*
Par. 5 - La parabola *114*
Par. 6 - L'ellisse *124*
Par. 7 - L'iperbole *129*
Par. 8 - Formule di rotazione *136*
Par. 9 - La funzione omografica *139*
Par. 10 - Le coniche generiche *142*
Par. 11 - Le coniche degeneri *148*
CAP. 6 - I LIMITI 153
Par. 1 - Premesse *153*
Par. 2 - Il concetto di limite *157*
Come si calcola un limite? 159
Par. 3 - Le forme indeterminate *160*
Par. 4 - Teoremi sui limiti (senza dimostrazione) *163*
Par. 5 - Limiti notevoli (senza dimostrazione) *164*
Par. 6 - Confronto fra infinitesimi *165*

Par. 7 - Funzioni continue 168
Par. 8 - Le discontinuità 171
CAP. 7 - LE DERIVATE 174
Par. 1 - Dal rapporto incrementale alla derivata 174
Par. 2 - Continuità e derivabilità 180
Par. 3 - Regole di derivazione 182
Par. 4 - Le funzioni composte 183
Par. 5 - La derivazione delle funzioni inverse 184
Par. 6 - Il teorema di Rolle 190
Par. 7 - Il teorema di Lagrange (valor medio) 191
Par. 8 - Il teorema di Cauchy 191
Par. 9 - Il teorema di De l'Hospital 192
CAP. 8 - GLI INTEGRALI 195
Par. 1 - Il concetto di differenziale 195
Par. 2 - L'integrale definito 197
Par. 3 - Proprietà dell'integrale definito 200
Par. 4 - La funzione integrale 203
Par. 5 - Teorema di Torricelli-Barrow 203
Par. 6 - Integrali immediati 206
Par. 7 - Calcolo di un'area 207
Par. 8 - Integrazione per sostituzione 209
Par. 9 - Integrazione per parti 210
Par. 10 - Integrazione per scomposizione 211
Par. 11 - Teorema della media 214
Par. 12 - Volume di un solido di rotazione 215
Par. 13 - Integrali impropri 216
CAP. 9 - MATRICI 218
Par. 1 - Premesse sulle matrici 218
Par. 2 - Determinante di una matrice quadrata 219
Par. 3 - Proprietà delle matrici quadrate 222

Par. 4 - Operazioni fra matrici *226*
Par. 5 - La regola di Cramer *228*
Par. 6 - Il teorema di Rouché-Capelli *230*
Par. 7 - I sistemi omogenei *233*
CAP. 10 - CALCOLO VETTORIALE 237
Par. 1 - Elementi di calcolo vettoriale *237*
Par. 2 - Prodotto scalare fra due vettori *242*
Par. 3 - Prodotto vettoriale fra due vettori *244*
Par. 4 - Proprietà ed esempi *248*
CAP. 11 - GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO 256
Par. 1 – Rette e piani *256*
Par. 2 - Parallelismo e perpendicolarità *262*
Par. 3 - Le quadriche *269*
Par. 4 - Invarianti *275*

INTRODUZIONE

Questo testo non ha alcuna pretesa di costituire un'esposizione rigorosa e completa degli argomenti trattati.
E' soltanto un manuale di rapida consultazione per studenti che, in alcuni punti, offre (forse) una spiegazione più chiara ed intuitiva rispetto a quella normalmente presente nei testi tradizionali.
Ho volutamente saltato molte dimostrazioni, preoccupandomi però in molte occasioni di fornire una giustificazione logica di quanto andavo affermando.
Come scelta consapevole (suggerita dalla mia esperienza di docente di un liceo scientifico), preferisco usare il rigore scientifico solo quando è necessario, ma non sempre.
Preferisco decisamente la semplicità e l'immediatezza ad un rigore formalmente ineccepibile a spese della chiarezza.
Lo scopo di questi appunti è quello di fornire un valido appoggio ai testi tradizionali presentando in modo sintetico e chiaro tutti i punti fondamentali e tradizionalmente più ostici per lo studente, insieme ad un repertorio abbastanza ampio di esempi svolti.

Carlo Sintini
c.sintini@libero.it

CAP. 1 - PREMESSE

Par. 1 - Proprietà delle potenze

In questo primo capitolo passiamo in rassegna alcuni concetti elementari che dovrebbero essere già noti, ma che spesso sono (almeno in parte) del tutto dimenticati.
Cominciamo con un ripasso sulle proprietà delle potenze.

1) $1^n = 1$
2) $a^0 = 1$ (tranne che per a = 0 perché in tal caso il risultato è indeterminato)
3) $(a\ b\ c)^n = a^n\ b^n\ c^n$ (Attenzione ! Gli elementi dentro parentesi devono essere tutti moltiplicati fra loro: non devono esserci segni di addizione)
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (Attenzione! Anche qui gli elementi dentro parentesi devono essere divisi fra loro: non devono esserci segni di sottrazione)
5) $a^m\ a^n = a^{m+n}$ (Attenzione! La regola non vale se al primo membro c'è $a^m + a^n$)
6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Attenzione! La regola non vale se al primo membro c'è $a^m - a^n$)
7) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
8) $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$
9) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
10) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

Par. 2 - Proprietà dei radicali

Proseguiamo con le proprietà dei radicali:

1) $\sqrt[0]{a} = \text{impossibile } (\text{con}\, a \neq 1)$

2) $\sqrt[0]{1} = \text{indeterminato}$

3) $\sqrt[1]{a} = a$

4) $\sqrt[n]{a^n} = a$

5) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$ (Per esempio $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3\cdot 5]{a^{2\cdot 5}} = \sqrt[15]{a^{10}}$)

Applicando questa regola al contrario (Per esempio $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$) si dice che si è **ridotto**, semplificato, il radicale.

6) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^2} = a^{\frac{6}{3}}\sqrt[3]{b^2} = a^2\sqrt[3]{b^2}$

$\sqrt[3]{a^7 \cdot b^2} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^1 \cdot b^2} = a^{\frac{6}{3}}\sqrt[3]{a \cdot b^2} = a^2\sqrt[3]{a \cdot b^2}$

$\sqrt[3]{a^6 \pm b^2}$ (Attenzione ! Con i segni $\pm$ non è possibile portare fuori di radice la potenza)

7) $a^3\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a^{3\cdot 2} \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^6 \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^7 \cdot b}$

$a^3 \pm \sqrt{a \cdot b}$ (Attenzione ! Anche in questi casi i segni $\pm$ impediscono di portare la potenza sotto la radice)

8) Prodotto o rapporto fra radicali con lo stesso indice:

$\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{ab^2 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b^2} = a \cdot \sqrt[3]{b^2}$

$\sqrt[3]{ab^2} : \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$

$\sqrt[3]{ab^2} \pm \sqrt[3]{a^2}$ (Attenzione! Al solito i segni $\pm$ impediscono l'unione delle radici)

Se i radicali sono moltiplicati o divisi fra loro ed hanno **indici differenti** fra loro, si debbono prima trasformare in modo che gli indici diventino uguali, e poi si procede come sopra. Per esempio:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^3b}$$

Calcoliamo il m.c.m. dei tre indici (m.c.m.=12), e trasformiamo i tre radicali applicando la regola 5) in modo che assumano tutti lo stesso indice 12:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^3b}=\sqrt[2\cdot 6]{(a)^6}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{\left(ab^2\right)^4}\cdot\sqrt[4\cdot 3]{\left(a^3b\right)^3}=$$
$$=\sqrt[12]{a^6}\cdot\sqrt[12]{a^4b^8}\cdot\sqrt[12]{a^9b^3}=\sqrt[12]{a^6\cdot a^4b^8\cdot a^9b^3}=$$
$$=\sqrt[12]{a^{19}\cdot b^{11}}=\sqrt[12]{a^{12}\cdot a^7\cdot b^{11}}=a\cdot\sqrt[12]{a^7\cdot b^{11}}$$

9)
$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{ab^2}}}=\sqrt[3\cdot 2\cdot 4]{ab^2}=\sqrt[24]{ab^2}$$
$$\sqrt[4]{a^3\sqrt[2]{b}}=\sqrt[4]{\sqrt[2]{a^{3\cdot 2}b}}=\sqrt[4]{\sqrt[2]{a^6b}}=\sqrt[8]{a^6b}$$
$$\sqrt[3]{a\pm\sqrt[4]{b}}$$

(Ancora a causa dei segni ± non è possibile applicare la regola.)

Fa eccezione il caso, detto dei **radicali doppi**, in cui i due radicali abbiano entrambi indice 2, e la quantità a^2-b sia un quadrato perfetto.

In tale caso, ponendo $a^2-b=c^2$, si ha

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Par. 3 - I prodotti notevoli

Raggruppiamo in questo paragrafo sia i prodotti notevoli classici, che quei criteri che permettono di trasformare un polinomio in un prodotto di due o più fattori.

1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
2) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$
4) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ (Attenzione! a^2+b^2 non è un prodotto notevole)
5) Il raccoglimento a fattor comune. Per esempio:
   $15a^2b^3 + 5a^2b^2 - 20a^3b^5 = 5a^2b^2 (3b + 1 - 4ab^3)$
6) Il doppio raccoglimento a fattor comune. Per esempio:

$$3a^2 + ab - 2b^2 = 3a^2 + 3ab - 2ab - 2b^2 = 3a(a + b) - 2b(a + b) =$$
$$= (3a - 2b)(a + b)$$

7) Ogni trinomio di secondo grado ax^2+bx+c può essere scritto nella forma $a(x - x_1)(x - x_2)$ dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c = 0$.
8) La divisione con il metodo di Ruffini.
   Dato per esempio il polinomio
   $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ esso, vedi a fianco, si può scrivere nella forma
   $(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	=

Par. 4 - Varie

1) Razionalizzazione del denominatore di una frazione (procedimento per eliminare un radicale dal denominatore di una frazione). Ecco alcuni esempi fra i più comuni:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-2} = \frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{-1} = 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

2) Confronto fra due frazioni per stabilire quale delle due è più grande.
Basta moltiplicare in croce (con le frecce verso l'alto): è più grande la frazione dalla cui parte si trova il risultato maggiore. Per esempio, fra le due frazioni sottostanti

$$\begin{array}{ccc} 18 & \qquad & 25 \\ \\ \dfrac{3}{5} & \qquad & \dfrac{5}{6} \end{array}$$

e' più grande il prodotto 25 e quindi è più grande la seconda frazione.

3) Confronto fra due radicali. Si deve trasportare tutto sotto la radice e poi trasformare gli indici in modo che assumano lo stesso valore. Per esempio,
I due radicali

$$3\sqrt{2} \qquad\qquad 2\sqrt[3]{7}$$

possono essere trasformati nel modo seguente:

$$3\sqrt{2} \qquad 2\sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt{3^2 \cdot 2} \qquad \sqrt[3]{2^3 \cdot 7}$$

$$\sqrt{9 \cdot 2} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 7}$$

$$\sqrt{18} \qquad \sqrt[3]{56}$$

$$\sqrt[2\cdot 3]{18^3} \qquad \sqrt[3\cdot 2]{56^2}$$

$$\sqrt[6]{5832} \qquad \sqrt[6]{3136}$$

Da cui risulta che il primo radicale è più grande del secondo perché il primo radicando (il numero sotto radice), è maggiore.

Par. 5 – Le categorie numeriche

Ripercorriamo l'evoluzione del concetto di numero partendo da quelli che per primi furono ideati dall'uomo: i numeri **NATURALI** (o numeri interi)

… 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

che sono indicati simbolicamente con la lettera **N**.

Questi altri sono invece i numeri positivi e negativi (o numeri **RELATIVI**)

… -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 …

e sono indicati con la lettera **Z**.

Il segno più davanti ai numeri positivi è facoltativo ed in genere viene messo solo quando la sua mancanza può generare confusione. Lo zero è il solo numero a non avere segno: è unico.

Fra un numero intero (positivo o negativo) e il successivo possono essere inseriti infiniti altri numeri (i numeri decimali o con la virgola)

… -5 … -4 … -3 … -2 … -1 … 0 … 1 … 2 … 3 … 4 … 5 …

in questo caso i numeri si chiamano **RAZIONALI** e vengono indicati con la lettera **Q**.

Tutti i numeri razionali possono essere messi sotto la forma $\frac{m}{n}$ in cui m ed n sono entrambi numeri interi.
I **numeri periodici** appartengono alla categoria dei numeri razionali perché possono essere trasformati nella loro frazione generatrice.
Per esempio,

$$2,3333... = 2,\overline{3} = 2,(3) = \frac{7}{3}$$

$$2,13333... = 2,1\overline{3} = 2,1(3) = \frac{192}{90}$$

$$2,13131313... = 2,\overline{13} = 2,(13) = \frac{211}{99}$$

Il periodo (come mostrano il secondo e il terzo membro) può essere indicato sia con una sopra-linea che con una parentesi.
La frazione generatrice di un numero periodico si può ottenere applicando una semplice regola (che si insegna nelle scuole medie), e che non è necessario spiegare in questo contesto: con una calcolatrice tascabile è comunque possibile fare la controprova e verificare che le frazioni corrispondono proprio ai numeri periodici indicati.
E' importante notare che anche i numeri naturali e relativi possono essere considerati razionali perché è possibile metterli sotto la forma $\frac{m}{n}$.

Per esempio,

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$0 = \frac{0}{1}$$

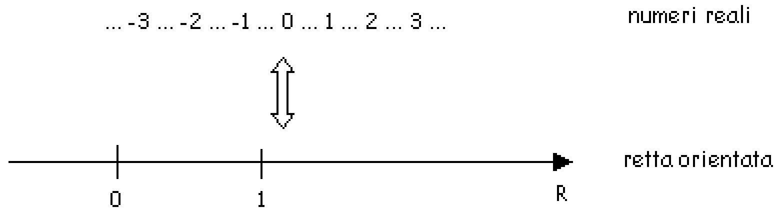
$$-4,2 = -\frac{4,2}{1} = -\frac{42}{10} = -\frac{21}{5}$$

Esistono però altri numeri che non possono essere messi sotto la forma $\frac{m}{n}$ e per questa ragione sono detti **IRRAZIONALI**, e sono caratterizzati dal fatto che hanno **infinite cifre decimali non periodiche**.
Essi provengono da tutte le radici che non corrispondono a potenze esatte

$$\sqrt{2} = 1,412413... \quad \sqrt[3]{7} = 1,213921... \quad \text{ecc}$$

dal rapporto di una circonferenza con il proprio raggio (il famoso pi greco $\pi = 3,1415...$), dal calcolo di quasi tutte le funzioni trigonometriche (per esempio: cos 25° = 0,906307…), e si potrebbe seguitare con molti altri esempi.
I numeri razionali ed irrazionali costituiscono due insiemi separati, nel senso che un numero non può assolutamente appartenere ad entrambe le categorie: o può essere messo sotto la forma $\frac{m}{n}$ (ed allora è razionale), o non può essere messo sotto tale forma (ed allora è irrazionale).
L'insieme costituito dall'unione dei due insiemi, quello dei numeri RAZIONALI ed IRRAZIONALI costituisce una nuova categoria numerica che prende il nome di insieme dei **NUMERI REALI** e vengono indicati con la lettera **R**.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza con i punti di una retta:



Ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta, e ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale: si ha una **CORRISPONDENZA che funziona in entrambe le direzioni** (cioè biunivoca).
Se tentassimo invece di mettere a confronto i numeri N, Z, Q con una retta orientata, la corrispondenza funzionerebbe in una sola direzione. Cioè a ciascuno di questi numeri corrisponderebbe un punto sulla retta, ma ci sarebbero infiniti punti della retta ai quali non corrisponderebbe alcun numero.

N.B. A proposito dei numeri razionali nella forma $\frac{m}{n}$ occorre precisare che

$\frac{5}{0}$ = impossibile (nessun numero moltiplicato per 0 è uguale a 5)

$\frac{0}{0}$ = indeterminato (ogni numero moltiplicato per 0 è uguale a 0)

quindi **una frazione è nulla solo se il suo numeratore è nullo**.

Il discorso sulle categorie numeriche non è finito perché può avvenire che sotto una radice quadrata (o comunque con indice pari) ci sia un numero negativo, per esempio $\sqrt{-4}$.
Il risultato di queste radici può essere calcolato se si pone

$$i^2 = -1 \quad \text{cioè} \quad i = \sqrt{-1}.$$

In tal caso si può scrivere

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2 = 2i$$

$$\sqrt{-13} = \sqrt{-1 \cdot 13} = \sqrt{-1}\sqrt{13} = i\sqrt{13}$$

I numeri di questo tipo prendono il nome di numeri **IMMAGINARI**.
Questi numeri ovviamente non possono essere rappresentati sulla retta orientata dei numeri reali.

A questo punto è possibile creare una nuova categoria numerica detta dei **NUMERI COMPLESSI**.
Un numero complesso è formato da due parti unite da un segno più o meno: la prima parte è un numero reale, la seconda parte è un numero complesso (il segno più o meno è solo simbolico perché non è possibile calcolare un risultato di una simile somma algebrica).
Per esempio:

$3+2i$ la parte reale è il numero 3, la parte immaginaria 2i

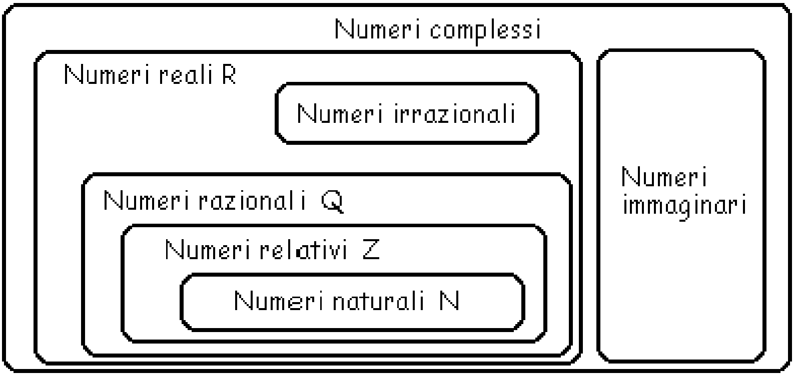
$5-4i$ la parte reale è il numero 5, la parte immaginaria -4i

7 la parte reale è il numero 7, la parte immaginaria nulla

3i la parte reale è nulla, la parte immaginaria 3i

In questo modo ogni numero può essere considerato come un numero complesso.
Due numeri complessi con la stessa parte reale e con parte immaginaria uguale e di segno opposto, vengono detti **COMPLESSI CONIUGATI** fra loro.

Concludiamo osservando che ogni categoria numerica comprende le precedenti come un sottoinsieme



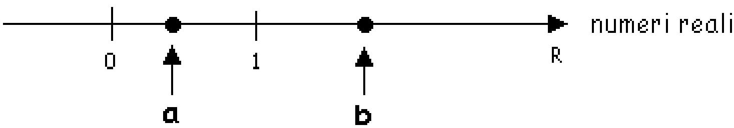
Cioè i numeri naturali sono un sottoinsieme di quelli relativi, quelli relativi sono un sottoinsieme di quelli razionali, e così via.

Par. 6 - Gli intervalli

I numeri reali possono quindi essere messi in corrispondenza con i punti di una retta orientata. Accade spesso di dover prendere in considerazione tutti i numeri (o tutti i punti) compresi fra due valori: si ottiene così un **intervallo**.

I punti estremi di questo intervallo possono essere compresi o esclusi dall'intervallo stesso, ed inoltre uno degli estremi può coincidere con il punto all'infinito (a destra o a sinistra).

Chiariamo questo concetto con degli esempi. Siano dati due numeri reali arbitrari che denominiamo simbolicamente con le lettere **a** e **b**



Se **a** è minore di **b** (cioè se **a < b**), allora la differenza **b-a** costituisce un intervallo formato da tutti i punti compresi fra a e b, e tale differenza costituisce la **lunghezza dell'intervallo**, ed è positiva qualunque sia la posizione di **a** e di **b** rispetto allo zero (cioè anche se uno o entrambi sono a sinistra dello zero).
Per esempio:

$$\begin{cases} \text{se a} = 4 \\ \text{se b} = 7 \end{cases} \quad \text{allora b-a} = 7\text{-}4 = 3 > 0$$

$$\begin{cases} \text{se a} = -3 \\ \text{se b} = 2 \end{cases} \quad \text{allora b-a} = 2\text{-}(-3) = 2+3 = 5 > 0$$

$$\begin{cases} \text{se a} = -9 \\ \text{se b} = -5 \end{cases} \quad \text{allora b-a} = -5\text{-}(-9) = -5+9 = 4 > 0$$

Se invece **a** è maggiore di **b** (cioè se **a > b**), allora la differenza è sempre negativa.
L'intervallo è formato da tutti i punti compresi fra **a** e **b**, ma, come abbiamo già detto, i punti estremi possono appartenere o no all'intervallo.
Le varie situazioni possibili si indicano simbolicamente nei modi seguenti

$[a;b]$ se gli estremi a e b sono compresi nell'intervallo

$]a;b[$ se gli estremi a e b sono esclusi dall'intervallo

$]a;b]$ se l'estremo a è escluso e l'estremo b è compreso

$[a;b[$ se l'estremo a è compreso e l'estremo b è escluso

In altre parole se la parentesi più vicina è nel verso giusto, allora l'estremo corrispondente è compreso. Mentre se la parentesi più vicina è rovesciata, allora l'estremo corrispondente è escluso.

Oppure, usando una notazione differente, indicando con x un punto generico della retta, questo appartiene all'intervallo se rispettivamente si verifica che

$a \le x \le b$ (si chiama anche intervallo chiuso)

$a < x < b$ (si chiama anche intervallo aperto)

$a < x \le b$ (si chiama anche intervallo aperto a sinistra)

$a \le x < b$ (si chiama anche intervallo aperto a destra)

Nel primo caso l'intervallo è chiuso perché ci sono un primo punto (**a**) da cui inizia l'intervallo, ed un ultimo punto (**b**) con cui finisce l'intervallo; nel secondo caso l'intervallo è aperto perché non si può dire quali siano il primo e l'ultimo punto. Nel terzo si conosce l'ultimo punto ma non il primo, e nel quarto caso si verifica il contrario.

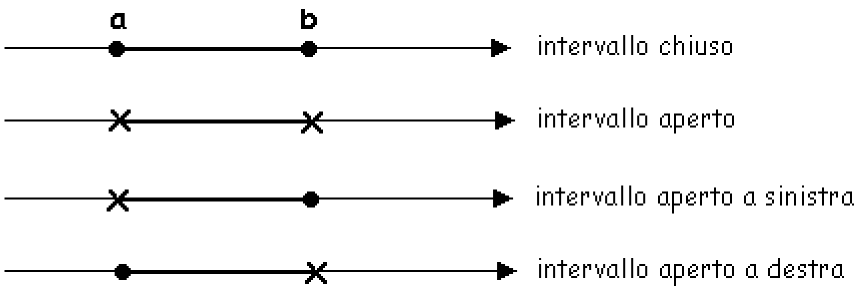
Talvolta si indica un intervallo anche usando una notazione simbolica di questo tipo

$$[a;b] \quad = \quad \{x{:}a \le x \le b\}$$

e il contenuto della parentesi graffa si legge: "qualunque sia x compreso fra a e b (estremi inclusi)".

Cioè "x:…" si legge "qualunque sia x tale che …".

Dal punto di vista grafico indicheremo con un tondino un punto appartenente all'intervallo, e con una crocetta un punto non appartenente ad esso



Un estremo dell'intervallo può anche estendersi fino all'infinito: infatti se fisso un punto sulla retta, tutti i punti a sinistra (o tutti i punti a destra) di tale punto costituiscono anch'essi un intervallo.
Indicheremo questi intervalli nel modo seguente

$]-\infty;a]$ oppure $-\infty < x \leq a$ (se a appartiene all'intervallo)

$]-\infty;a[$ oppure $-\infty < x < a$ (se a non appartiene all'intervallo)

$[b;\infty[$ oppure $b \leq x < \infty$ (se b appartiene all'intervallo)

$]b:\infty[$ oppure $b < x < \infty$ (se b non appartiene all'intervallo)

ovviamente quando un estremo è l'infinito, il punto corrispondente non può mai appartenere all'intervallo (perché non è mai possibile raggiungere tale punto).

Par. 7 - Le disuguaglianze e le disequazioni

Siano **a**, **b**, **c** e **d** dei generici numeri reali. Per le disuguaglianze valgono le seguenti proprietà

1) Se **a** < **b** e **b** < **c** allora è anche **a** < **c**
2) Se **a** < **b**, allora è anche **a**+**c** < **b**+**c** oppure **a**-**c** < **b**-**c**
3) Se **a** < **b** e **c** è positivo, allora **ac** < **bc**
4) Se **a** < **b** e **c** è negativo, allora **ac** > **bc**
5) Se **a** < **b** e **c** < **d** allora è anche (sommando membro a membro) **a**+**c** < **b**+**d**
6) Se **a** < **b** ed **a** e **b** sono entrambi positivi o entrambi negativi, allora è anche $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

In altre parole

1) Se due disuguaglianze sono consecutive (cioè se il secondo membro della prima coincide con il primo

membro della seconda) e di segno concorde, allora si può eliminare il valore intermedio.

2) Il verso della disuguaglianza rimane invariato se sommiamo o sottraiamo lo stesso numero ad entrambi i membri.
3) Il verso della disuguaglianza rimane invariato se moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri per uno stesso numero **positivo**.
4) Il verso della disuguaglianza viene invertito se moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri per uno stesso numero **negativo**.
5) Due disuguaglianze con verso concorde possono essere sommate membro a membro.
6) Si deve cambiare il verso di una disuguaglianza se i due membri hanno lo stesso segno, e li sostituisco con i loro reciproci.

Se nei due membri di una disuguaglianza ci sono due espressioni algebriche (contenenti una lettera incognita x) invece di due valori numerici, rimangono valide tutte le proprietà precedenti, e la disuguaglianza prende il nome di disequazione.
Per esempio:

$$3x-5>6(x+3)^2+5$$

$$\frac{4x^3-2x}{1-x}\le 6x^2-x+3$$

E' sempre possibile trasportare tutti i termini nel primo membro (cambiando i loro segni, come nelle equazioni). Nei due casi precedenti si ha

$$3x-5-6(x+3)^2-5>0$$

$$\frac{4x^3-2x}{1-x}-6x^2+x-3\le 0$$

Possiamo quindi immaginare una disequazione come una espressione algebrica che indicheremo simbolicamente con f(x) nel primo membro, ed uno zero nel secondo membro.
Cioè una disequazione può sempre essere trasformata in modo da apparire in una delle forme seguenti

$$f(x)>0 \quad f(x)\ge 0 \quad f(x)<0 \quad f(x)\le 0$$

Stabiliamo di chiamare **RIDOTTA** una disequazione portata in tale forma.
Come si risolve una disequazione?
Sviluppando i 5 punti seguenti:

1. Trasformare la disequazione e portarla in forma ridotta.
2. Risolvere l'**equazione associata**, cioè l'equazione che si ottiene sostituendo il segno maggiore o minore con quello di uguale. Si ottengono così gli **ZERI** dell'equazione, cioè i valori che sostituiti nel primo membro dell'equazione associata, la rendono uguale a zero. Si chiamano invece **POLI** quei valori che rendono il primo membro uguale ad infinito (per esempio quei valori che annullano l'eventuale denominatore di f(x). Si capirà meglio studiando l'esempio n. 3).
3. Riportare zeri (ed eventuali poli) su una retta orientata.
4. Stabilire quale segno assume la f(x) in ciascuno degli intervalli che si vengono a formare. Per assolvere a questo compito basta prendere dei valori di prova (arbitrari) in ciascuno degli intervalli, e sostituirli questi nella f(x). Questa operazione prende il nome di **studio del segno**.
5. Determinare le soluzioni della disequazione confrontando i risultati del punto 4 con il verso della disequazione.

Vediamo di capire meglio quanto detto alla luce di alcuni esempi.

ESEMPIO 1

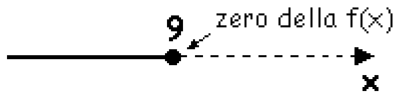
$\frac{x-1}{2}+3 \le x+\frac{1-x}{4}$ Disequazione iniziale

$2x-2+12 \le 4x+1-x$

$-x+9 \le 0$ Forma ridotta $\{$o anche $f(x) \le 0\}$

$-x+9 = 0$ Equazione associata $\{$o anche $f(x) = 0\}$

L'equazione ha un solo zero: x=9
Su una retta orientata si ha



Infatti sostituendo il valore di prova x = 0 nella forma ridotta si ha come risultato 9 (numero positivo); quindi tutti i valori a sinistra dello zero fanno assumere valore positivo alla forma ridotta.
Sostituendo invece come valore di prova x = 10 nella forma ridotta si ha come risultato –1 (numero negativo); quindi tutti i valori a destra dello zero fanno assumere valore negativo alla forma ridotta.
Questo studio del segno viene reso evidente nel grafico precedente tracciando a tratto pieno l'intervallo a sinistra dello zero, e tratteggiato l'intervallo a destra.
Le soluzioni della disequazione (vedi il segno della forma ridotta) sono quei valori della x che rendono tale forma negativa. Cioè tutti i valori a destra dello zero, con lo zero

incluso perché la disuguaglianza contiene anche il segno di uguale.
Algebricamente dunque le soluzioni sono

$$x \geq 9$$

ESEMPIO 2

$2\cdot(x+1)-3\cdot(x-1)^2 > 2\cdot(x+3)(3-x)-28$ Disequazione iniziale

$2x+2-3\cdot(x^2-2x+1) > 2\cdot(3x\text{-}x^2+9-3x)-28$

$2x+2-3x^2+6x-3 > -2x^2+18-28$

$-x^2+8x+9>0$

$x^2-8x-9<0$ Forma ridotta $\{$o anche $f(x)<0\}$

$x^2-8x-9=0$ Equazione associata $\{$o anche $f(x)=0\}$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si trovano le due soluzioni (i due zeri)

$$x=-1 \qquad x=9$$

Con i valori di prova si ottiene il grafico

Le soluzioni della disequazione (vedi il segno della forma ridotta) sono quei valori della x che rendono tale forma negativa. Cioè tutti i valori compresi nell'intervallo fra –1 e 9 (estremi esclusi perché la disuguaglianza non ha il segno di uguale).
Algebricamente dunque le soluzioni sono

$$-1<x<9 \quad \text{oppure} \quad]-1;9[$$

ESEMPIO 3

$$\frac{7}{x-2} \le 3-\frac{8}{x-5}$$ Disequazione iniziale

$$\frac{7}{x-2} - 3 + \frac{8}{x-5} \le 0$$

$$\frac{7\cdot(x-5) - 3\cdot(x-2)(x-5) + 8\cdot(x-2)}{(x-2)(x-5)} \le 0$$

$$\frac{7x - 35 - 3\cdot(x^2 - 7x + 10) + 8x - 16}{(x-2)(x-5)} \le 0$$

$$\frac{15x - 51 - 3x^2 + 21x - 30}{(x-2)(x-5)} \le 0$$

$$\frac{-3x^2 + 36x - 81}{(x-2)(x-5)} \le 0$$

$$\frac{x^2 - 12x + 27}{(x-2)(x-5)} \ge 0$$ Forma ridotta

$$\frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 7x + 10} = 0$$ Equazione associata

Il numeratore ha come soluzioni

$$x = 3 \qquad x = 9$$

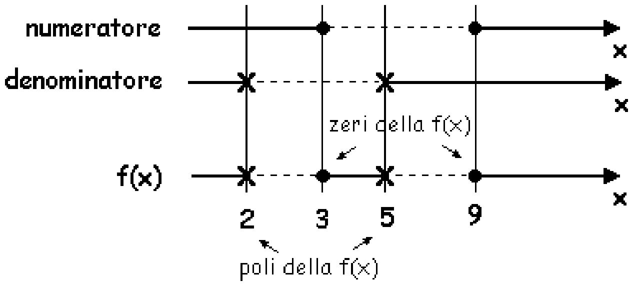
che sono due **zeri** perché rendono nullo il numeratore della frazione e quindi la f(x) è nulla.

Il denominatore ha come soluzioni

$$x = 2 \qquad x = 5$$

che sono invece due **poli** perché rendono nullo il denominatore della frazione e quindi la f(x) è infinita.

Sistemando i grafici del numeratore e del denominatore uno sotto l'altro, e studiandone il segno con dei valori di prova, si ha



Applicando la **regola dei segni di Cartesio** (nella moltiplicazione e divisione due segni concordi danno risultato positivo, mentre due segni opposti danno risultato negativo), si trova il risultato indicato nell'ultima retta orientata.
A questo punto, poiché nella forma ridotta c'è il segno maggiore o uguale, le soluzioni della disequazione sono gli intervalli

$$\begin{cases} x < 2 \\ 3 \leq x < 5 \\ x \geq 9 \end{cases}$$

dove i valori x=2 e x=5 sono esclusi perché sono poli e rendono infinita la f(x).
Le soluzioni possono anche essere indicate con un'unica espressione nel modo seguente

$$]-\infty; 2[\cup [3; 5[\cup [9; \infty[$$

In cui i tre intervalli sono indicati con le parentesi quadre (diritte o rovesciate), e fra di essi c'è il simbolo di unione (la U) che significa che le soluzioni sono costituite da tutti i valori della x che appartengono al primo intervallo, o al secondo, o al terzo.

ESEMPIO 4

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$ Disequazione iniziale (in forma ridotta)

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ Equazione associata

Se la disequazione consiste in un polinomio di grado superiore al secondo, provare a trasformare il polinomio in modo da avere nel primo membro un prodotto di due o più fattori di primo o di secondo grado. Se è possibile realizzare questa trasformazione (per esempio applicando la divisione con il metodo di Ruffini), allora diremo che si è ottenuta una **forma fattorizzata**.

Nel nostro esempio il polinomio può essere diviso per x=1, infatti

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Dividiamo con Ruffini

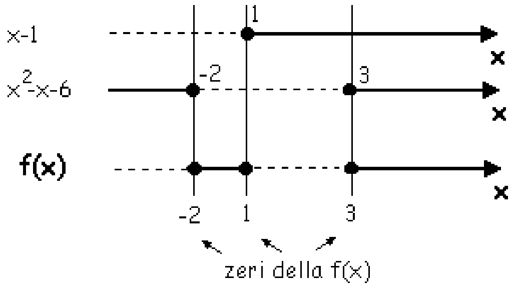
	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	=

Si ottiene

$$(x-1)(x^2 - x - 6) \geq 0 \qquad \text{Forma fattorizzata}$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \qquad \text{Equazione associata}$$

Lo studio del segno dei singoli fattori e della f(x), ottenuta applicando la regola dei segni di Cartesio, fornisce



Le soluzioni della disequazione sono allora tutte le x comprese nella unione dei due intervalli (zeri inclusi per via del segno di uguale), in cui la forma fattorizzata assume segno positivo o nullo

$$[-2;1] \cup [3;\infty[$$

Par. 8 - Le espressioni con modulo

Quando un numero è compreso fra due barrette verticali $|a|$ vuol dire che va preso **in modulo** (o in **valore assoluto**).
Cioè se il numero è positivo, le barrette non hanno alcuna funzione ed è come se fossero una comune parentesi. Se invece il numero è negativo, allora il segno meno va eliminato.
Quindi

$$|5| = 5 \qquad \text{mentre invece} \qquad |-3| = 3$$

Alcune proprietà dei valori assoluti:

$$|-a| = a$$

$$|ab| = |a| \cdot |b| \qquad \text{da cui deriva che} \qquad |a^n| = |a|^n$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$\sqrt{a^2} = |a|$ perché $\pm a$ elevati al quadrato danno entrambi a^2

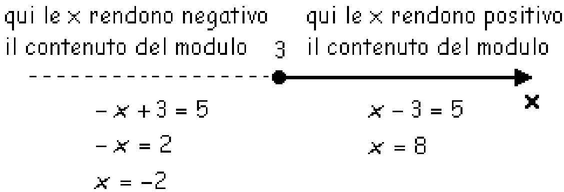
$$|a+b| \le |a| + |b| \quad \text{infatti} \quad \begin{cases} |3+2| = |3| + |2| \\ |5-3| = |5+(-3)| < |5| + |-3| \end{cases}$$

Vediamo ora come ci si comporta quando si deve risolvere una equazione o una disequazione contenente uno o più valori assoluti.

ESEMPIO 5

$$|x-3| = 5$$

Si trova facilmente che il contenuto del modulo (si dice anche l'**argomento del modulo**), si annulla per x = 3, è positivo per valori maggiori e negativo per valori minori.
Si vengono a formare due intervalli (quello a destra e quello a sinistra di 3), ed in ciascuno dei due intervalli la presenza del modulo da origine ad una diversa equazione.
Risolvendole si ha

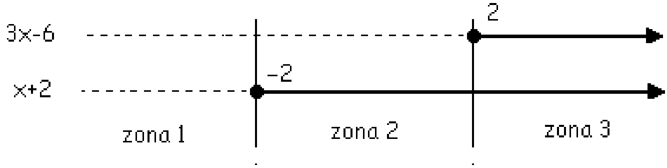


Quindi l'equazione ha due soluzioni x=-2 e x=8.

ESEMPIO 6

$$|3x-6| = |x+2|$$

Studiando il segno degli argomenti di entrambi i moduli, si possono individuare tre intervalli (o zone)



In questo caso non si deve applicare la regola dei segni di Cartesio (le rette orientate non si riferiscono a due espressioni moltiplicate o divise fra loro).
Nella zona 3 i segni sono entrambi positivi e quindi entrambi i moduli è come se non esistessero; nella zona 1 i segni sono entrambi negativi e quindi dovrei cambiare tutti i segni dei termini contenuti in ciascuno dei due moduli. Questo equivale a cambiare segno a tutti i termini dell'equazione, che quindi rimane in sostanza invariata.
Ne deriva che nelle zone 1 e 3 l'equazione assume la forma

$$3x-6 = x+2$$

che risolta fornisce la soluzione

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Nella zona 2 invece solo il contenuto del primo modulo assume valore negativo, ed allora si deve cambiare segno solo ai termini contenuti nel primo modulo.
Si ha allora

$$-3x+6 = x+2$$

$$-4x = -4$$

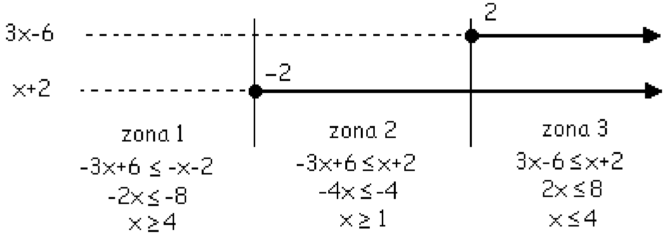
$$x = 1$$

Quindi l'equazione iniziale ha come soluzioni x=1 e x=-4.

ESEMPIO 7

$$|3x-6| \le |x+2|$$

Dall'esempio precedente abbiamo visto che si possono individuare tre diverse zone. A differenza di prima le zone 1 e 3 non si equivalgono perché stavolta abbiamo a che fare con una disequazione e non una equazione.
Abbiamo quindi tre diverse disequazioni (una per ciascuna zona), che possono essere risolte

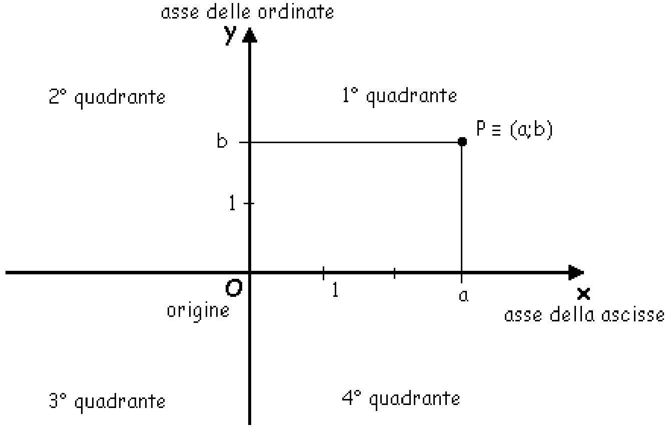


La zona 1 fornisce soluzioni che ricadono esternamente ad essa, e quindi non sono accettabili.
Nella zona 2 risulta che le soluzioni sono tutte le x maggiori o uguali ad uno (e minori di 2 perché occorre rimanere all'interno della zona).
Nella zona 3 le soluzioni sono tutte le x minori o uguali a 4 (a partire da 2 perché occorre rimanere all'interno della zona).
Per concludere le soluzioni sono quindi costituite da tutte le x comprese nell'intervallo che va da 1 a 4, estremi compresi (intervallo chiuso).
Algebricamente scriveremo: $[1;4]$.

CAP. 2 - GRAFICI, SIMMETRIE E TRASLAZIONI

Par. 1 - I grafici nel piano cartesiano

I punti del piano possono essere messi in corrispondenza (biunivoca, cioè funzionante nei due versi) con le **coppie ordinate di numeri reali**.



Nella figura è rappresentato il punto P in cui a=3 e b=2. Ha importanza anche l'ordine con cui vengono presi i due numeri, infatti scambiandoli fra loro si ottiene generalmente un punto differente dal precedente.

Una espressione algebrica qualsiasi (detta anche funzione) contenente due incognite (dette anche variabili) **x** ed **y**, viene indicata simbolicamente nei due modi seguenti

$$f(x,y)=0 \qquad \text{funzione in forma implicita}$$

$$y=f(x) \qquad \text{funzione in forma esplicita}$$

Quando la funzione è messa in una di queste due forme, si dice che è scritta in forma standard o ridotta.

Per il momento prenderemo in esame solo **funzioni algebriche**, cioè quelle che nella forma implicita hanno nel primo membro un polinomio, e dunque non contengono logaritmi, esponenziali o funzioni trigonometriche.
Per esempio:

$x-2y+6=0$ funzione in forma implicita

$y=\frac{1}{2}x-3$ funzione in forma esplicita

$x^2+3y^2-2x+y-8=0$ funzione in forma implicita

$y=\frac{x^3-4x^2}{x^2-5x+6}$ funzione in forma esplicita

La funzione del secondo esempio è stata ricavata dalla prima. Esse quindi si equivalgono fra loro: una stessa funzione può dunque essere scritta sia in forma implicita che esplicita.
Ma non sempre ciò è possibile: la terza funzione infatti non può essere messa in forma esplicita.
Vedremo fra poco quale sia la condizione necessaria perché una funzione possa essere scritta in forma esplicita.
Occupiamoci ora di un aspetto diverso: una equazione con due incognite non ha un numero limitato di soluzioni, ma infinite.
Esse possono essere ottenute assegnando ad una delle due incognite dei valori numerici arbitrari e calcolando ogni volta il corrispondente valore che assume l'altra.
Per esempio nella prima funzione

$$y=\frac{1}{2}x-3$$

$$\text{ponendo} \quad x=0 \quad \text{si ottiene} \quad y=-3$$

$$\text{ponendo} \quad x=1 \quad \text{si ottiene} \quad y=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{3}$$

$$\text{ponendo} \quad x=2 \quad \text{si ottiene} \quad y=1-3=-2$$

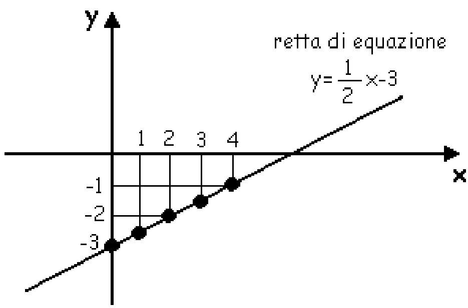
$$\text{ponendo} \quad x=3 \quad \text{si ottiene} \quad y=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

$$\text{ponendo} \quad x=4 \quad \text{si ottiene} \quad y=\frac{4}{2}-3=-1$$

e così via …
Interpretando queste soluzioni come coordinate di punti

$$(0;-3) \qquad \left(1;-\frac{5}{3}\right) \qquad (2;-2) \qquad \left(3;-\frac{3}{2}\right) \qquad (4;-1) \qquad ...$$

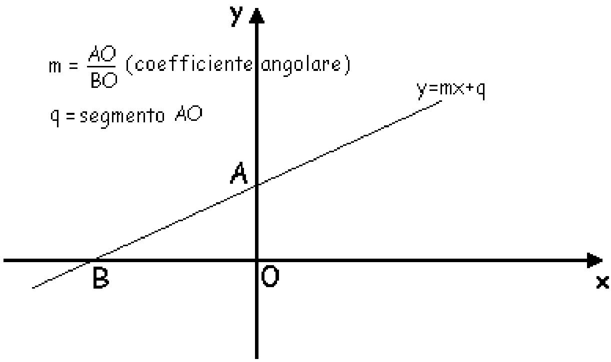
ci si accorge che questi sono tutti allineati e formano una retta. Si può dunque affermare che la funzione corrisponde nel piano cartesiano ad una retta.



Più generalmente possiamo affermare che tutte le equazioni di primo grado con due incognite **x** ed **y** corrispondono sempre a rette nel piano cartesiano.
Perciò ogni funzione del tipo

$$y=mx+q$$

corrisponde nel piano cartesiano ad una retta e i coefficienti **m** e **q** prendono rispettivamente il nome di **coefficiente angolare** e **ordinata all'origine** (o segmento staccato dalla retta sull'asse y a partire dall'origine).



Il coefficiente angolare ha questo nome perché indica il grado di inclinazione della retta.
Due rette con lo stesso coefficiente angolare sono inclinate allo stesso modo e quindi sono parallele fra loro.
Se m è positivo, la retta è inclinata verso l'alto. Mentre se m è negativo, la retta è inclinata verso il basso.
Più alto è il coefficiente angolare e maggiore è l'inclinazione della retta.
Il termine q invece indica la distanza AO (vedi figura), cioè il punto in cui la retta taglia l'asse y.
Può però avvenire che una funzione in forma esplicita abbia nel secondo membro una espressione che non sia un binomio di primo grado, per esempio

$$y = x^2 - 5x + 6$$

In questo caso la funzione non è una retta, però con lo stesso procedimento già visto possiamo calcolare alcuni suoi punti prendendo dei valori arbitrari ponendo $x = 0$ si ottiene $y = 6$

ponendo $x = 1$ si ottiene $y = 1 - 5 + 6 = 2$

ponendo $x = 2$ si ottiene $y = 4 - 10 + 6 = 0$

ponendo $x = 3$ si ottiene $y = 9 - 15 + 6 = 0$

ponendo $x = 4$ si ottiene $y = 16 - 20 + 6 = 2$

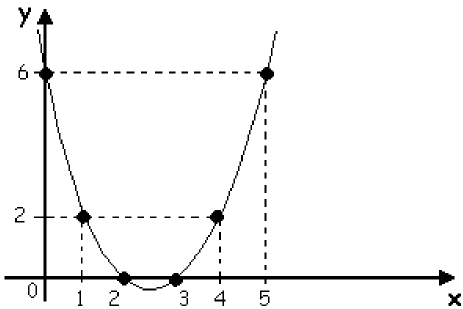
ponendo $x = 5$ si ottiene $y = 25 - 25 + 6 = 6$

e così via …

Interpretando queste soluzioni come coordinate di punti

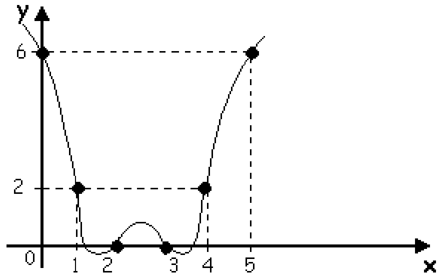
$(0;6) \quad (1;2) \quad (2;0) \quad (3;0) \quad (4;2) \quad (5;6) \quad ...$

Si vede che questi non sono allineati, ma formano una curva di questo tipo

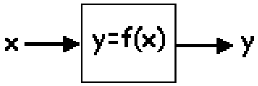


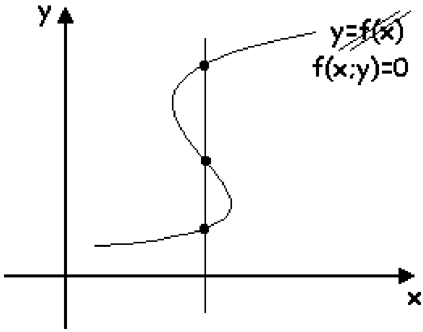
Questo metodo di studio per ottenere il grafico di una funzione, si chiama **metodo per punti**, richiede molti calcoli se la funzione è un po' complessa, ma soprattutto non è molto affidabile.

Infatti per esempio nel caso precedente la funzione in base ai punti calcolati avrebbe anche potuto avere questo andamento



Vedremo in seguito come si deve procedere per raccogliere informazioni sulla funzione in modo da poterla poi graficare con sicurezza.
All'inizio del capitolo abbiamo affermato che non sempre una funzione in forma implicita può essere trasformata e messa in forma esplicita.
Perché la trasformazione sia possibile, deve essere soddisfatto il **principio della retta verticale**.
Infatti dal punto di vista algebrico la funzione agisce come un dispositivo (vedi figura a sinistra), in cui inserendo un valore numerico x, si ha come risultato un altro valore numerico y.
Oppure nessuno, per esempio nel caso $y = \sqrt{2 - x}$ se poniamo x=3 si ha y=i, che non può essere messo sull'asse y.
Ma non può mai avvenire che inserendo un valore per la x, si abbiano due o più valori per la y.





Per esempio, nella figura a destra si ha una funzione che non può essere scritta in forma esplicita perché una retta verticale taglia la funzione in più di un punto, e quindi per un opportuno valore della x debbono potersi ottenere più valori della y (nell'esempio sono tre).
Quindi una funzione può essere messa in forma esplicita se una generica retta verticale la taglia in un solo punto (o nessuno).

Par. 2 - Il dominio

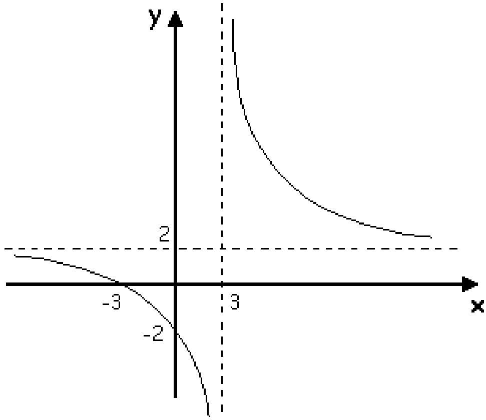
Data una funzione y = f(x) chiamiamo **dominio** (o insieme di definizione della funzione), **l'insieme di tutti i valori dell'asse x la cui ordinata è reale e finita**.
Vanno quindi esclusi dal dominio tutti i valori della x la cui ordinata è **immaginaria**, o **indefinita**, o **infinita**.

ESEMPIO 8

Data la funzione

$$y = \frac{2x+6}{x-3}$$

si può facilmente constatare che qualunque valore di x fornisce un corrispondente valore per la y.
Fa eccezione soltanto il valore x=3 per il quale la corrispondente y è infinita ($y = \frac{6}{0} = \infty$).
Il grafico della funzione (come vedremo meglio in seguito) è



Il dominio è costituito in questo caso da tutti i valori della x, eccettuato il valore x=3 in cui la funzione è infinita.
Il dominio viene indicato algebricamente nel modo seguente

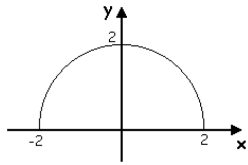
$$]-\infty;3[\ \cup\ ]3;\infty[$$

cioè l'unione dell'intervallo che va da -∞ a 3 (estremi esclusi), con l'intervallo che va da 3 ad ∞ (estremi esclusi).

ESEMPIO 9

Consideriamo invece la funzione $y = \sqrt{4 - x^2}$

Il grafico della funzione è (vedremo meglio in seguito che è una semicirconferenza).



Se assegniamo alla x dei valori minori di –2 o maggiori di 2, (per esempio x=3) otteniamo per la y dei valori immaginari ($y = \sqrt{4-9} = \sqrt{-5} = i\sqrt{5}$).

Quindi vanno esclusi dal dominio tutti i valori della x esterni all'intervallo che va da –2 a 2.

Il dominio è formato in questo caso dall'intervallo (estremi inclusi) $\left[-2;2\right]$

ESEMPIO 10

Sia data la funzione

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2(x-1)}$$

Se poniamo x = 1 non si ottiene y = ∞ (come nell'esempio 8), ma $y = \frac{0}{0}$ che è una forma indeterminata (vedi riquadro con N.B. nel primo capitolo).

Cioè per x=1 non è possibile calcolare un corrispondente valore per la y.

La ragione di questa impossibilità si chiarisce se fattorizziamo il numeratore

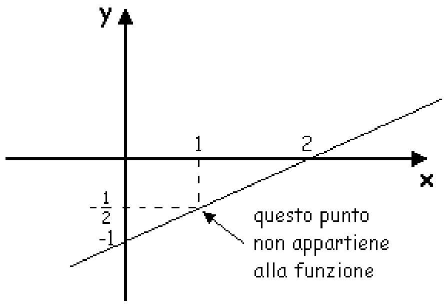
$$y=\frac{(x-2)(x-1)}{2(x-1)}$$

quando poniamo x=1 è il fattore (x-1) che si annulla sia nel numeratore che nel denominatore, a dar luogo alla forma indeterminata.
Ma la frazione può essere semplificata e si ottiene

$$y=\frac{x-2}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}x-1$$

Dunque la funzione è una retta

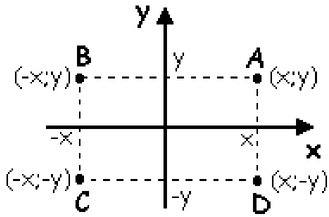


Ma attenzione: la funzione assegnata è la $y=\frac{x^2-3x+2}{2(x-1)}$ ed in questa espressione il valore x=1 fornisce una y indeterminata.
Quindi il grafico corrispondente è sì una retta, ma mancante di un punto.
Il dominio della funzione è allora tutto l'asse x ad eccezione del punto x=1.

$$]-\infty;1[\,\cup\,]1;\infty[$$

Par. 3 - Le simmetrie

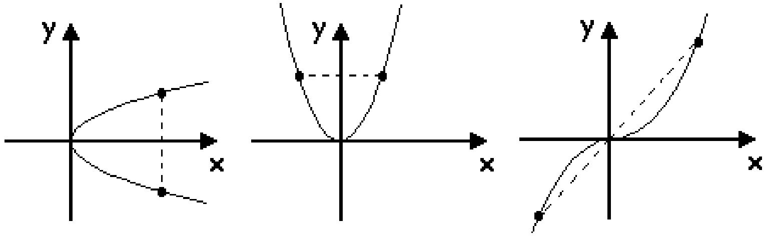
Consideriamo un punto generico A nel piano cartesiano, con coordinate arbitrarie.



- Il punto D è il simmetrico di A rispetto all'asse x. Si ottiene D sostituendo –y al posto di y nelle coordinate di A.
- Il punto B è il simmetrico di A rispetto all'asse y. Si ottiene B sostituendo –x al posto di x nelle coordinate di A.
- Il punto C è il simmetrico di A rispetto all'origine (l'intersezione degli assi). Si ottiene C sostituendo –x e –y al posto di x e y nelle coordinate di A.

Si capisce allora perché, data una funzione f(x;y)=0 si può affermare che:

- è simmetrica rispetto all'asse x se sostituendo –y al posto di y, questa rimane invariata.
- è simmetrica rispetto all'asse y se sostituendo –x al posto di x, questa rimane invariata.
- è simmetrica rispetto all'origine se sostituendo –x e –y al posto di x ed y, questa rimane invariata.



Nella figura sono indicate tre funzioni rispettivamente simmetriche rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine.

ESEMPIO 11

$$x - y^2 - 2 = 0$$

Risolvendo rispetto ad y si ha

$$y^2 = x - 2$$

$$y = \pm\sqrt{x-2}$$

Con l'estrazione della radice quadrata abbiamo dovuto introdurre il doppio segno ± che è un modo simbolico per affermare che esistono due funzioni diverse

$$y = \sqrt{x-2} \qquad e \qquad y = -\sqrt{x-2}$$

che elevate al quadrato restituiscono la funzione implicita iniziale.
Questo significa che la funzione data **non è esplicitabile** rispetto alla y, cioè non può essere scritta nella forma y = f(x), e non soddisfa quindi la regola della retta verticale.
Infatti ponendo per esempio x = 5 si ottengono due valori della y ($y = \sqrt{3}$ e $y = -\sqrt{3}$).
Osserviamo che ponendo comunque nella funzione $y^2 = x - 2$ due valori numerici uguali e di segno opposto, si ottiene in entrambi i casi sempre lo stesso risultato finale.
Algebricamente indichiamo questa proprietà scrivendo

$$\boxed{f(x;y) = f(x;-y)}$$

La funzione è dunque simmetrica rispetto all'asse x.
Non ci interessa per il momento ricavare il grafico della funzione.

ESEMPIO 12

$$x^4 - 4x^2 - y + 1 = 0$$

Questa funzione è invece esplicitabile (rispetto alla y) e fornisce

$$y = x^4 - 4x^2 + 1$$

E' facile verificare che ponendo al posto della x due valori numerici uguali e di segno opposto, si ottiene in entrambi i casi sempre lo stesso risultato finale.
La funzione è quindi simmetrica rispetto all'asse y.
Algebricamente indichiamo questa proprietà scrivendo

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x;y) = f(-x;y) \quad \text{oppure} \\ f(x) = f(-x) \end{array}}$$

Una funzione di questo tipo viene anche detta **funzione pari** perché la x ha solo esponenti di grado pari; il termine noto (quello senza la x) viene classificato di grado zero perché si può immaginare moltiplicato per x^0 (x^0=1) e lo zero viene considerato numero pari.
Non ci interessa per il momento ricavare il grafico della funzione.

ESEMPIO 13

$$x^3 + 3x - y = 0$$

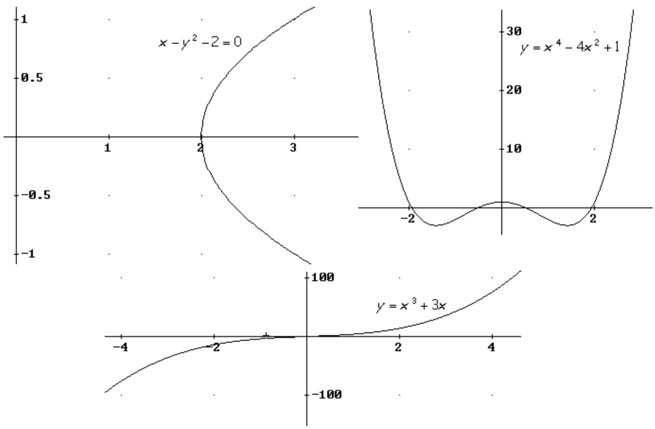
Anche questa funzione è esplicitabile (rispetto alla y) e fornisce

$$y = x^3 + 3x$$

Si può verificare che ponendo al posto della x un valore numerico arbitrario si ottiene un corrispondente valore per la y: sostituendo invece il valore –x si ottiene –y.
Cioè

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x;y) = f(-x;-y) \quad \text{oppure} \\ f(x) = -f(-x) \end{array}}$$

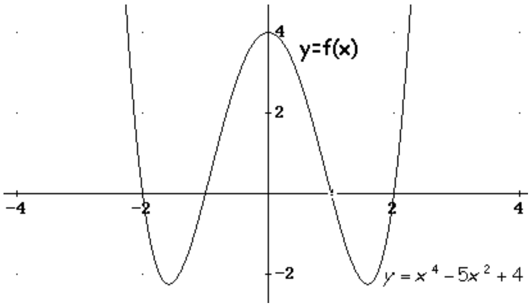
Una funzione di questo tipo viene anche detta **funzione dispari** perché la x ha solo esponenti di grado dispari; il termine noto (classificato, come si è visto nell'esempio precedente, di grado pari), deve essere assente.
Non ci interessa per il momento ricavare il grafico della funzione.
Comunque, a titolo di curiosità, ecco i grafici relativi agli ultimi tre esempi precedenti



Par. 4 - Le costanti additive e moltiplicative

Si abbia una generica funzione y = f(x) di cui immaginiamo di conoscere il grafico, senza per ora preoccuparci di come si debba operare per ottenerlo.

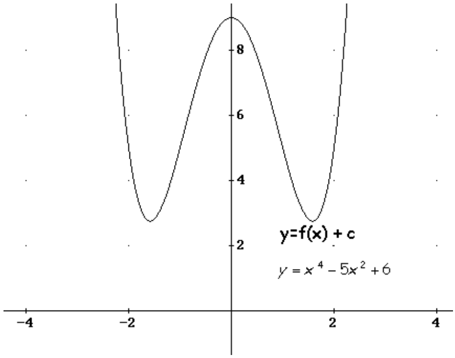
Per fissare le idee prendiamo come esempio la funzione $y = x^4 - 5x^2 + 4$ il cui grafico è tracciato qui sotto



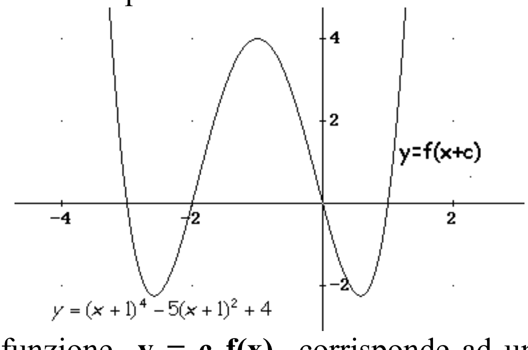
Che effetto ha su di essa una costante?

Distinguiamo 4 casi fondamentali differenti ed importanti:

1. La funzione **y = f(x)+c** corrisponde ad una nuova funzione identica alla precedente, ma spostata in alto o in basso a seconda che c sia positiva o negativa. Infatti nella nuova funzione si dovrà aggiungere la costante c ad ogni y della funzione precedente.
   Se per esempio c = 2 tutta la funzione risulta spostata verso l'alto di 2 unità.
   La funzione diviene $y = x^4 - 5x^2 + 6$
   In altre parole si ha una **traslazione verticale** della funzione che però rimane invariata come forma.



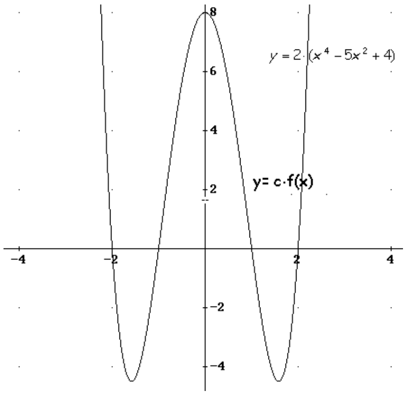
2. La funzione **y = f(x+c)** corrisponde invece ad una nuova funzione identica a quella iniziale, ma spostata a sinistra o a destra a seconda che c sia positiva o negativa.
   Se per esempio c = 1 la funzione risulta spostata a sinistra di una unità.
   La funzione diviene $y = (x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 4$
   In altre parole si ha una **traslazione laterale** della funzione che però rimane invariata come forma.



3. La funzione **y = c f(x)** corrisponde ad una funzione dilatata o compressa verticalmente.

Se per esempio c = 2 la funzione risulta dilatata verticalmente di un fattore 2 perché tutte le sue ordinate risultano moltiplicate per 2.

La funzione diviene $y = 2 \cdot (x^4 - 5x^2 + 4)$



Se la costante c assume valori compresi fra 0 ed 1, allora si ha una compressione verticale, invece di una dilatazione.

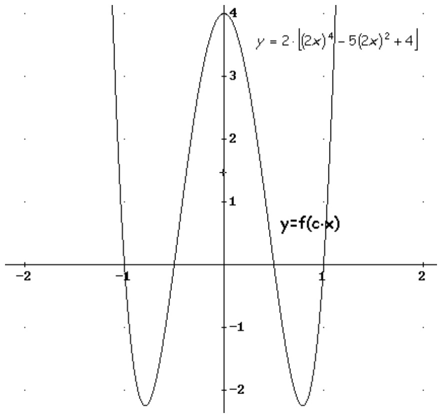
Se poi i valori di c sono negativi tutte le ordinate risultano cambiate di segno ed oltre ad una dilatazione o compressione verticale, si ha anche una rotazione, un ribaltamento, rispetto all'asse x.

Infine, se c = -1, la funzione non ha deformazioni verticali, ma solo il ribaltamento rispetto all'asse x.

4. La funzione **y = f(c x)** corrisponde infine ad una funzione dilatata o compressa orizzontalmente.

Se per esempio c = 2 la funzione risulta dilatata orizzontalmente di un fattore 2 perché tutte le sue ascisse risultano moltiplicate per 2.

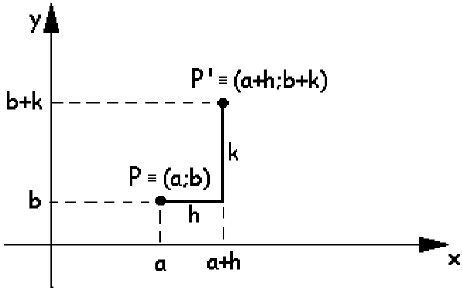
La funzione diviene $y = 2 \cdot \left[(2x)^4 - 5(2x)^2 + 4 \right]$



Se invece la costante c assume valori compresi fra 0 ed 1, allora si ha una compressione orizzontale, invece di una dilatazione.
Se poi i valori di c sono negativi tutte le ascisse risultano cambiate di segno ed oltre ad una dilatazione o compressione orizzontale, si ha anche una rotazione, un ribaltamento, rispetto all’asse y.
Infine, se c = -1, la funzione non ha deformazioni orizzontali, ma solo il ribaltamento rispetto all’asse y.

Par. 5 - Le traslazioni

Si abbia un punto P con coordinate (a;b) e si voglia spostarlo nella posizione P'



cioè si voglia portarlo nella nuova posizione con coordinate (a+h;b+k).

In altre parole le coordinate $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ devono trasformarsi nelle coordinate $\begin{cases} x' = a + h \\ y' = b + k \end{cases}$ o anche (sostituendo x ed y al posto di a e b)

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$$

Queste formule di trasformazione permettono di ottenere le nuove ordinate di un generico punto dopo uno spostamento orizzontale e verticale analogo a quello applicato al punto P.

Le coordinate di un punto prima della traslazione sono (x;y) e quelle dello stesso punto dopo la traslazione sono (x';y').

Riprendiamo in esame la funzione già vista nel paragrafo precedente

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

Vogliamo spostare, traslare, la funzione in modo da portarla verso destra di 3 unità e verso l'alto di 4 unità.
Quindi le formule di traslazione saranno

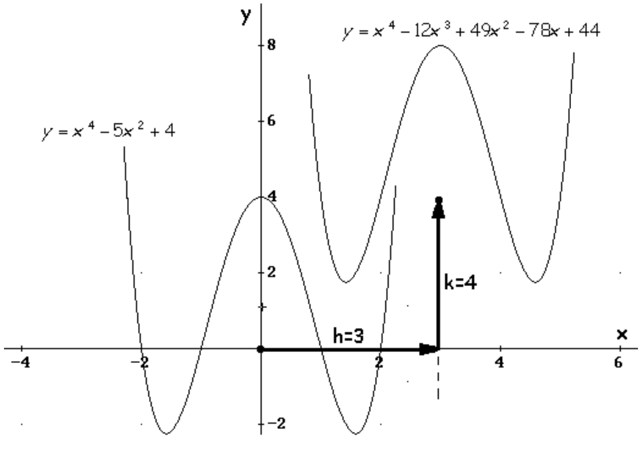
$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$$

Modifichiamo le due equazioni esplicitandole rispetto ad x ed y.
Otteniamo

$$\boxed{\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 4 \end{cases}}$$

Ora sostituiamo questi valori nella funzione

$$y - 4 = (x - 3)^4 - 5(x - 3)^2 + 4$$



Semplificando si ottiene

$$y - 4 = (x - 3)^2 (x - 3)^2 - 5(x - 3)^2 + 4$$

$$y = (x^2 - 6x + 9)(x^2 - 6x + 9) - 5(x^2 - 6x + 9) + 8$$

ed infine, sviluppando e semplificando ancora,

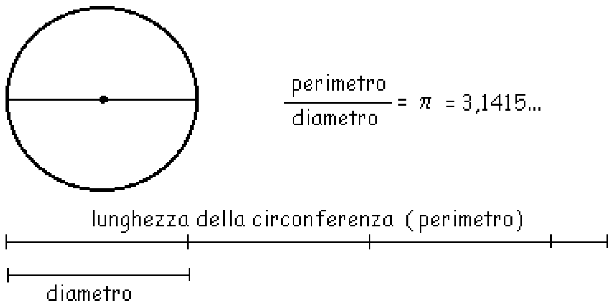
$$y = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x^3 + 36x^2 - 54x + 9x^2 - 54x + 81 - 5x^2$$
$$+ 30x - 45 + 8$$
$$y = x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 44$$

Quest’ultima è l’equazione della nuova funzione traslata.

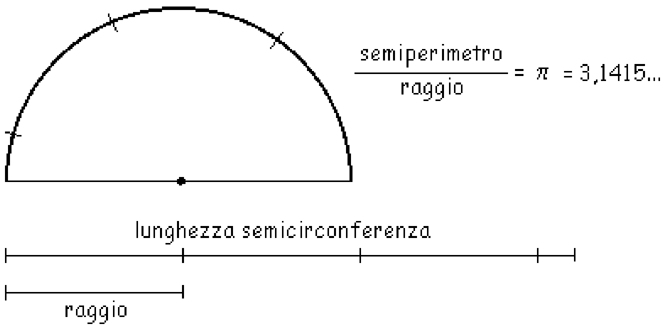
CAP. 3 - TRIGONOMETRIA

Par. 1 - La misura degli angoli in quadranti

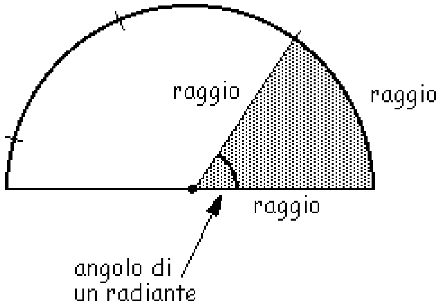
Data una circonferenza, qualunque sia il suo diametro, il rapporto fra il suo perimetro e il diametro è costante.
Questa costante è il famoso $\pi = 3{,}1415...$ (numero irrazionale)



Se ora dividiamo per 2 sia il numeratore che il denominatore della frazione, questa rimane invariata e quindi si ha anche



Ora prendiamo in considerazione il settore circolare colorato in grigio



L'angolo al centro prende il nome di **radiante**.
Quindi un radiante è quell'angolo al centro che delimita, comprende, un arco lungo come il raggio.
Spesso conviene misurare gli angoli prendendo questo angolo caratteristico come **angolo unitario**.
La sua ampiezza in gradi si ottiene dividendo l'angolo piatto (180°) per π.

$$\frac{180°}{\pi} \cong 57,...°$$

Inizialmente la scelta di questo angolo come unità di misura per gli angoli, può sembrare una complicazione.
Invece, come vedremo, è una scelta molto comoda:

- Un angolo di 180° corrisponde a π radianti (o semplicemente π)
- 360° corrispondono a 2 π radianti (o semplicemente 2π)
- 90° corrispondono a π/2 radianti (o semplicemente π/2).

E così via.
Per trasformare un angolo da gradi in radianti (o viceversa) basta risolvere una semplice proporzione fra l'angolo da trasformare e l'angolo piatto.

Prima si misurano i due angoli in gradi e poi si misurano gli stessi angoli in radianti.
Per esempio, si voglia trasformare in radianti l'angolo di 70°

$$70° : 180° = x : \pi$$

dove indichiamo con la x l'angolo da trasformare in radianti.
Risolvendo la proporzione si ha

$$x = \frac{70° \cdot \pi}{180°} = \frac{7}{18}\pi$$

Il risultato è sempre un numero intero o una frazione moltiplicata per π. Che è molto più conveniente da usare nei calcoli al posto di un angolo espresso in gradi, primi, secondi.
L'operazione si può fare anche al contrario per trasformare in gradi un angolo espresso in radianti.
Per esempio, l'angolo $x = \frac{3}{5}\pi$ a quanti gradi corrisponde?

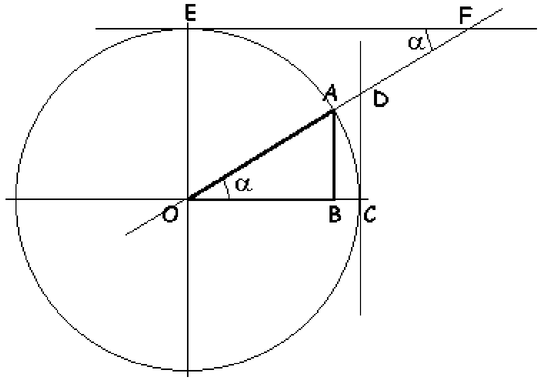
Si ha

$$\frac{3}{5}\pi : \pi = x : 180$$

$$x = \frac{\frac{3}{5}\pi \cdot 180}{\pi} = \frac{3}{5}180 = 3 \cdot 36 = 108°$$

Par. 2 - Le funzioni trigonometriche

Data una circonferenza di raggio arbitrario, tracciamo una retta qualsiasi passante per O e che formi con OC un angolo α.
Stabiliamo di misurare gli angoli (indifferentemente in gradi o in radianti) a partire da OC, e di considerarli positivi se ruotano in verso antiorario (come quello in figura), negativi se ruotano in verso opposto.



I triangoli OAB, ODC, OEF sono tutti e tre simili fra loro in quanto tutti e tre sono rettangoli e tutti e tre hanno un angolo uguale ad α (il terzo angolo dovrà essere uguale per differenza).
Definiamo le seguenti funzioni trigonometriche

$$\text{sen}\alpha = \frac{AB}{OA} \qquad \tan\alpha = \frac{DC}{OC}$$

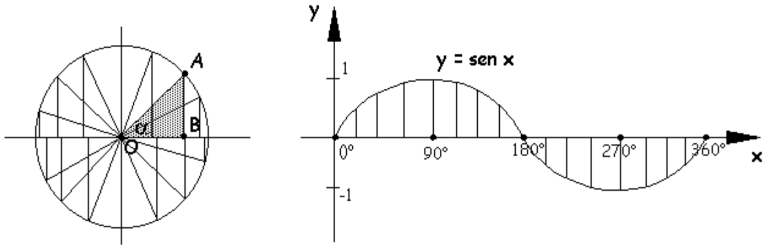
$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} \qquad \text{ctg}\alpha = \frac{EF}{EO}$$

Si noti che le funzioni trigonometriche sono tutti rapporti ed adenominatore c’è sempre il raggio della circonferenza.

Le funzioni trigonometriche non dipendono dal raggio della circonferenza, ma dipendono soltanto dall'ampiezza dell'angolo α.
Se la circonferenza ha raggio uguale ad uno (la chiameremo **circonferenza unitaria**), le funzioni trigonometriche diventano più semplicemente

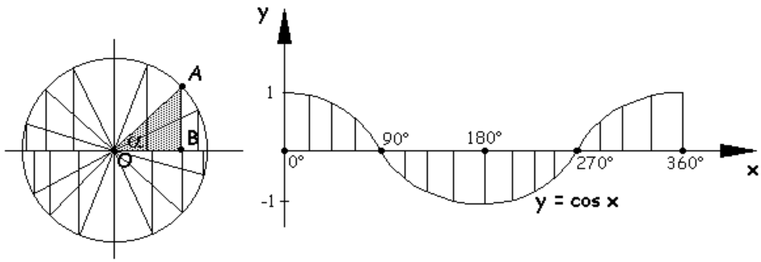
$$\text{sen}\alpha = AB \qquad \tan\alpha = CD$$
$$\cos\alpha = OB \qquad \text{ctg}\alpha = EF$$

Analizziamo più in dettaglio ciascuna di queste funzioni, immaginando per semplicità che la circonferenza utilizzata sia quella unitaria.

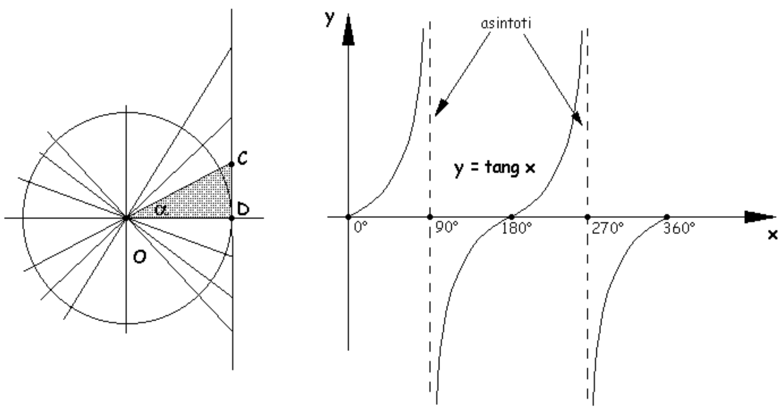


Quando il punto A descrive tutta la circonferenza, cioè quando l'angolo α varia fra 0° e 360° (e l'angolo α compie una rotazione completa), possiamo riportare in ascissa su un piano cartesiano i valori dell'angolo α, ed in ordinata i corrispondenti valori di AB (cioè del seno di α).
Si forma una curva detta **sinusoide** che deve immaginarsi prolungata all'infinito sia a destra che a sinistra, in quanto gli angoli possono essere anche maggiori di 360° o negativi. Ovviamente per tali angoli si ripeteranno ciclicamente sempre gli stessi valori del ciclo fondamentale mostrato in figura.
Dalla osservazione della figura risulta evidente che il seno di un angolo non può mai essere maggiore di 1 o minore di –1.

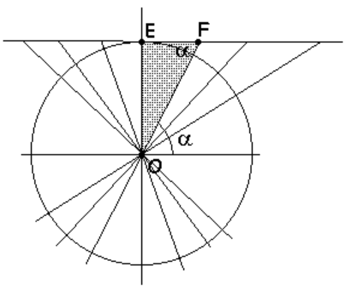
In modo perfettamente analogo, per il coseno dell'angolo α, possiamo ricavare la curva detta **cosinusoide**.

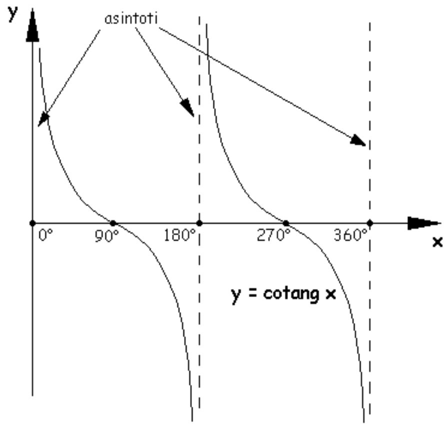


Anche questa funzione deve immaginarsi prolungata all'infinito sia a destra che a sinistra, ripetendo ciclicamente sempre gli stessi valori.
Si può osservare che la sinusoide è formalmente uguale alla cosinusoide: basta spostare a destra l'asse y di 90° per passare dalla prima curva alla seconda.
Anche il coseno di un angolo non può mai essere maggiore di 1 o minore di –1.
Per la tangente occorre fare un ragionamento leggermente diverso



Si deve tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto D: la tangente di α è rappresentata dal segmento CD (la circonferenza è sempre unitaria. In caso contrario sarebbe necessario calcolare il rapporto CD/OD, ma il valore numerico ottenuto sarebbe lo stesso di quello ottenuto con la circonferenza unitaria).
Quando la retta OC si trova nel secondo o nel terzo quadrante, non si deve tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto opposto a D, ma si deve individuare l'intersezione C fra la retta passante per O e la retta passante per D (vedi figura precedente).
I valori di tang α possono quindi assumere tutti i valori compresi fra $-\infty$ e ∞, e si ripetono ciclicamente dopo 180°.
Le rette tratteggiate verticali non fanno parte del grafico, si chiamano asintoti, e la funzione tende ad avvicinarsi sempre più ad esse.
Rimane da esaminare la cotangente.





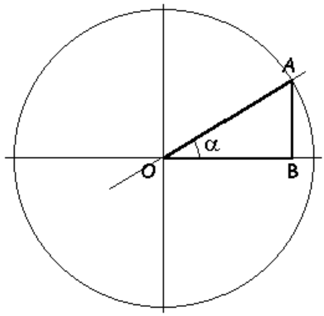
Si deve tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto E: la cotangente di α è rappresentata dal segmento EF (la circonferenza è sempre unitaria. In caso contrario sarebbe

necessario calcolare il rapporto CD/OD, ma il valore numerico ottenuto sarebbe lo stesso di quello ottenuto con la circonferenza unitaria).
Quando la retta OC si trova nel terzo o nel quarto quadrante, non si deve tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto opposto a E, ma si deve individuare l'intersezione F fra la retta passante per O e la retta passante per E (vedi figura precedente).
I valori di ctg α possono quindi assumere tutti i valori compresi fra $-\infty$ e ∞, e si ripetono ciclicamente dopo 180°.
Anche qui vi sono delle rette verticali denominate asintoti.
Mentre per il seno e coseno avevamo constatato che i grafici erano uguali con l'unica differenza di una traslazione laterale, confrontando fra loro la tangente e la cotangente possiamo vedere che le differenze sono più marcate.

Par. 3 - Le relazioni fondamentali

Passiamo ora alla elencazione di alcune proprietà molto importanti delle funzioni trigonometriche, dette **relazioni fondamentali**.

- Data una circonferenza (al solito quella unitaria, per semplicità) ed un angolo α, applichiamoli teorema di Pitagora al triangolo OAB



$$AB^2 + OB^2 = OA^2$$

$$(\mathrm{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

L'ultima relazione si può anche scrivere, eliminando la parentesi

$$\boxed{\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

N.B.

La scrittura $sen^2\alpha$ è nettamente diversa da $sen\alpha^2$.
Nel primo caso, che è un modo abbreviato per scrivere $(sen\alpha)^2$, si deve calcolare prima il valore del seno e poi si deve elevare al quadrato.
Nel secondo caso invece si deve prima elevare al quadrato l'angolo e poi se ne deve calcolare il seno.

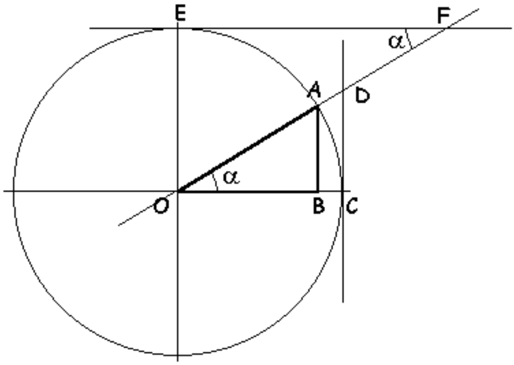
Esplicitando il seno o il coseno si ottengono due relazioni importanti

$$\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha = 1 - \mathrm{sen}^2\alpha$$

$$\mathrm{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\alpha}$$

che permettono di trasformare il coseno in seno e viceversa.

- Riprendiamo la figura all'inizio del paragrafo



e la definizione di tangente

$$\tan\alpha = \frac{DC}{OC}$$

I due triangoli OCD ed OBA sono simili, come abbiamo già avuto occasione di notare, e quindi possiamo impiantare una proporzione fra lati corrispondenti

$$DC : OC = AB : OB$$

$$\frac{DC}{OC} = \frac{AB}{OB}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\tan\alpha = \frac{DC}{OC} = \frac{AB}{OB} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

- La definizione di cotangente è

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{EF}{EO}$$

Riferendoci sempre alla stessa figura, anche i triangoli OEF ed OBA sono simili, e perciò analogamente al caso precedente possiamo scrivere

$$EF : EO = OB : AB$$

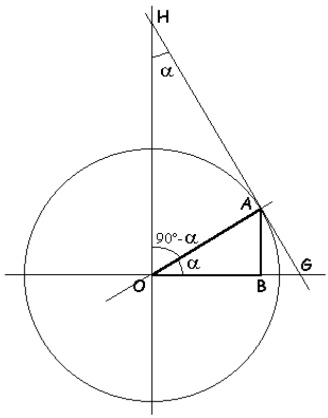
$$\frac{EF}{EO} = \frac{OB}{AB}$$

$$ctg\alpha = \frac{EF}{EO} = \frac{OB}{AB} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

che è il reciproco del risultato ottenuto nel caso precedente. Quindi si ha

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

Esistono altre due funzioni trigonometriche.



- Definiamo la prima, detta **secante** dell'angolo α

$$\sec\alpha = \frac{OG}{OA}$$

Il triangolo rettangolo OAG è simile al triangolo OAB perché sono entrambi rettangoli ed hanno un angolo in comune. Quindi si può scrivere la proporzione

$$OG : OA = OA : OB$$

$$\frac{OG}{OA} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\frac{OB}{OA}}$$

e allora la secante equivale al reciproco del coseno

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

- Definiamo l'ultima funzione trigonometrica, detta **cosecante** dell'angolo α

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OH}{OA}$$

Anche il triangolo OAH è simile al triangolo OAB.
Si può scrivere la proporzione

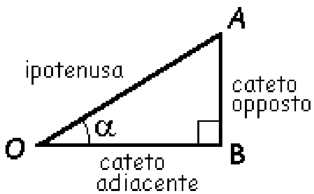
$$OH : OA = OA : AB$$

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{\frac{AB}{OA}}$$

e allora la cosecante equivale al reciproco del seno

$$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

N.B.
La presenza della circonferenza deve essere considerata come una nostra semplificazione per comprendere meglio le relazioni precedenti, ma generalmente possiamo eliminarla e prendere in considerazione solo un triangolo rettangolo generico.



In questo caso le funzioni trigonometriche possono essere espresse nel modo seguente

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{cateto opposto}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto adiacente}}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto opposto}}$$

restando valide tutte le relazioni fondamentali precedentemente elencate.

Par. 4 - Gli angoli notevoli

Calcoliamo il valore delle funzioni trigonometriche per alcuni angoli particolari: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

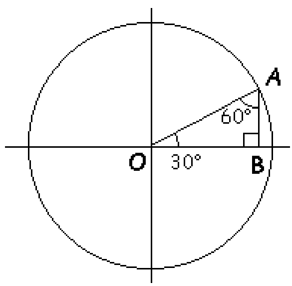
- Per 0° osservando i grafici della sinusoide, della cosinusoide, della tangentoide e della cotangentoide, possiamo ricavare immediatamente

$$\begin{aligned} &\text{sen}0° = 0 \\ &\cos 0° = 1 \\ &\tan 0° = \frac{\text{sen}0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0 \\ &\text{ctg}0° = \frac{\cos 0°}{\text{sen}0°} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

- In modo analogo, per 90° si ha

$$\begin{aligned} &\text{sen}90° = 1 \\ &\cos 90° = 0 \\ &\tan 90° = \frac{\text{sen}90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0} = \infty \\ &\text{ctg}90° = \frac{\cos 90°}{\text{sen}90°} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

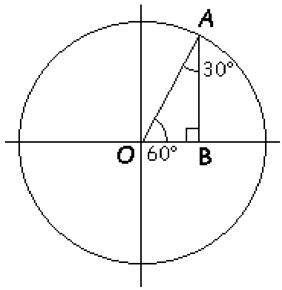
- Per un angolo di 30°



si può osservare che il triangolo OAB equivale a mezzo triangolo equilatero.
Se la circonferenza è unitaria OA=1 ed

$$OA = 1 \quad \text{ed} \quad AB = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}.$$

Applicando il teorema di Pitagora si ha



$$OB = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

E perciò

$$\text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ctg}30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

- Per un angolo di 60°

Si può osservare che il triangolo OAB è identico al precedente, con l'unica differenza che i due cateti sono scambiati fra loro.

Quindi si avranno gli stessi risultati del caso precedente, ma con i valori del seno e del coseno scambiati.
Cioè

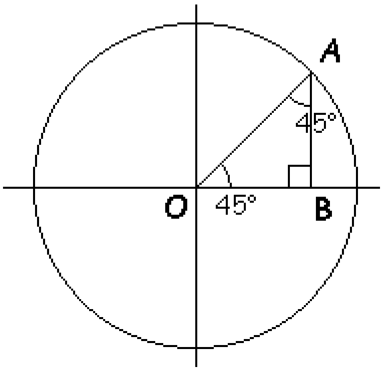
$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Rimane da sviluppare il caso in cui l'angolo è di 45°



Il triangolo rettangolo OAB ha i cateti uguali e, al solito, per semplicità poniamo l'ipotenusa uguale ad 1.
Indicando i cateti con x ed applicando il teorema di Pitagora, si ha

$$OB^2 + AB^2 = 1^2$$

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi i valori delle funzioni trigonometriche per l’angolo di 45°, sono

$$\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\text{ctg}\,45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$$

Tutti i risultati possono essere riepilogati nella tabella seguente:

	sen α	cos α	tan α	ctg α
0°	0	1	0	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	∞	0

Se si deve calcolare il valore di una funzione trigonometrica di un angolo non compreso fra i precedenti, occorre usare una calcolatrice tascabile.
Per esempio,

$$\text{sen}25° = 0,422618 \ \ ...$$

Il risultato è approssimato perché generalmente è un numero irrazionale.
Qualche volta può essere necessario compiere l'operazione inversa, cioè conoscendo il valore numerico di una funzione trigonometrica, si deve calcolare l'angolo corrispondente.
Per esempio, sapendo che il seno di un angolo è 0,422618 qual'è l'angolo da cui deriva?
La risposta in questo caso è ovviamente 25°.
Si indica questa operazione con la scrittura

$$\text{arcsen } 0{,}422618 = 25°$$

e significa che l'arco (cioè l'angolo) il cui seno è 0,422618 corrisponde a 25° (circa).
Questa scrittura rappresenta solo un **comodo simbolo** per indicare che l'operazione contraria di

$$\text{sen}x = y \quad \text{è} \quad \text{arcsen}y = x$$

Si può usare questo simbolo anche per il coseno e per le altre funzioni trigonometriche.
Così, per esempio, avremo che

$\text{arcsen } 0{,}256 \cong 15°$ perché $\text{sen } 15° \cong 0{,}256$

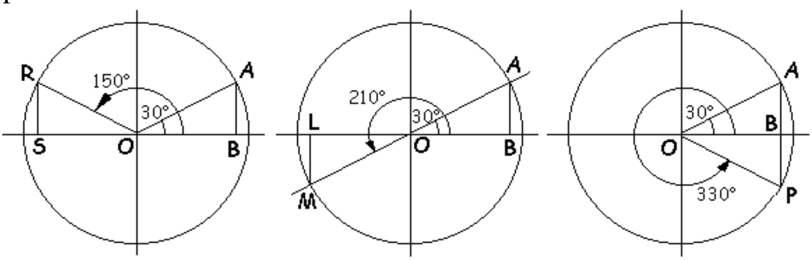
$\text{arccos } 0{,}693 \cong 46°$ perché $\text{sen } 46° \cong 0{,}693$

$\text{arctan } 12{,}3 \cong 85°$ perché $\tan 85° \cong 12{,}3$

$\text{arcsen } 2{,}431 =$ impossibile perché nessun angolo può avere seno maggiore di 1

Par. 5 - La riduzione al primo quadrante

Trattando gli angoli notevoli abbiamo preso in considerazione solo angoli di 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, che si trovano nel primo quadrante.
Perché non abbiamo proseguito con angoli che si trovano negli altri quadranti?
Per la semplice ragione che non è necessario!
Infatti è sempre possibile calcolare il valore degli angoli notevoli maggiori di 90°, riferendosi ad un triangolo identico a quello relativo all'angolo in questione, ma situato nel primo quadrante.



Così se, per esempio, volessimo calcolare sen 150°, dalla prima figura si vede come al triangolo OSR si possa far corrispondere il triangolo OAB nel primo quadrante: RS è uguale ad AB e quindi

$$\mathrm{sen}150° = \mathrm{sen}30° = \frac{1}{2}$$

In modo analogo, per il coseno

$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

il segno meno è dovuto al fatto che OS è negativo mentre OB è positivo.
Per la tangente di 210° si ha invece (vedi la seconda figura)

$$\tan 210° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Infine, vedi terza figura,

$$\mathrm{sen}330° = -\mathrm{sen}30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Questa volta è il seno a diventare negativo, perché AB è positivo mentre BP è negativo.

Par. 6 - Alcune formule importanti

Elenchiamo alcune delle formule e dei teoremi più importanti della trigonometria, senza però fornirne la dimostrazione, per la quale rimandiamo a testi più specializzati.

- Formule di addizione e sottrazione.

Un errore molto comune consiste nel ritenere che si possa scrivere

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$$

NON E' VERO!!!

Il "sen" che si trova nel primo membro non è una quantità moltiplicata per la parentesi, che ci permette di adoperare la proprietà distributiva.

E' un **operatore** che indica quale operazione dobbiamo eseguire sul contenuto della parentesi (che si chiama **argomento**).

Le formule corrette per il seno sono le seguenti

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

in cui il doppio segno significa che se nel primo membro c'è il segno superiore, anche nel secondo membro dobbiamo prendere il segno superiore.

Se invece c'è quello inferiore, anche nel secondo membro dobbiamo prendere quello inferiore.

Per esempio:

$$\operatorname{sen}75°=\operatorname{sen}(30°+45°)=\operatorname{sen}30°\cos45°+\cos30°\operatorname{sen}45°=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$$

Le formule per il coseno sono invece

$$\boxed{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

con le stesse convenzioni per il doppio segno.
Per esempio:

$$\cos 75° = \operatorname{sen}\left(30° + 45°\right) = \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen}30° \operatorname{sen}45° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}$$

Infine, le formule per la tangente sono

$$\boxed{\tan\left(\alpha \pm \beta\right) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}}$$

Per esempio:

$$\tan 15° = \tan\left(60° - 45°\right) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{3 - 1} =$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

- **Formule di duplicazione**

Rappresentano il caso particolare in cui nelle formule precedenti sia $\alpha = \beta$.

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos 2\alpha = \cos\left(\alpha + \alpha\right) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \\ &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\end{aligned}}$$

- **Formule di bisezione**

Permettono di passare dall'angolo $\alpha/2$ all'angolo α.

$$\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

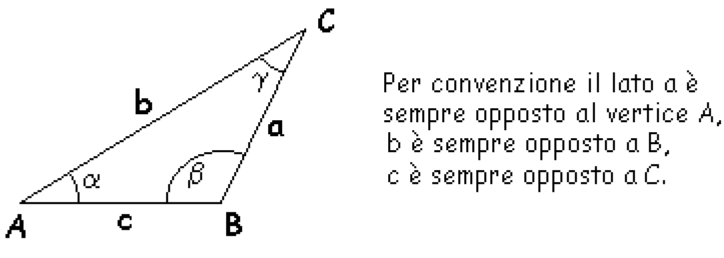
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

da cui, ponendo $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sen}\beta=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{2}}\\[2ex] \cos\beta=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{2}}\end{array}}$$

- **Teorema di Carnot**

Dato un triangolo qualsiasi



il quadrato di un lato è sempre uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto di questi lati per il coseno dell'angolo fra loro compreso.
Cioè

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha & \text{oppure} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta & \text{oppure} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma & \end{array}}$$

Se l'angolo che appare alla fine del secondo membro è di 90°, il triangolo è rettangolo, l'ultimo termine si annulla, ed il teorema di Carnot si trasforma nel teorema di Pitagora.

- **Area di un triangolo**

Con riferimento alla figura precedente, quindi in un triangolo qualsiasi, l'area del triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo fra loro compreso.

Cioè

$$\boxed{\begin{array}{ll} S = \dfrac{ab \cdot \text{sen}\gamma}{2} & \text{oppure} \\ S = \dfrac{ac \cdot \text{sen}\beta}{2} & \text{oppure} \\ S = \dfrac{bc \cdot \text{sen}\alpha}{2} & \end{array}}$$

- **Teorema dei seni.**

In un triangolo qualsiasi il rapporto fra un lato ed il seno dell'angolo opposto, è costante.

Cioè

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}}$$

ed il valore di tale rapporto è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Par. 7 - Le equazioni e disequazioni trigonometriche

Si possono risolvere senza l'uso della calcolatrice tascabile, solo quando i risultati possono essere ricondotti agli angoli notevoli.
Occorre solo fare attenzione che nelle equazioni, in ogni caso le soluzioni sono infinite perché esistono in genere altri angoli nei vari quadranti che soddisfano l'equazione, e perché le soluzioni si ripetono ciclicamente.
Conviene chiarire questo concetto con alcuni esempi.

ESEMPIO 14

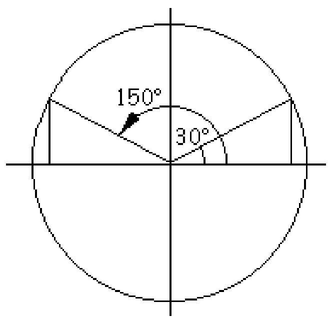
Si abbia l'equazione

$$1 - 2 \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

Considerando come incognita tutta la funzione "sen x" invece della sola "x", si ha

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

e quindi la soluzione $x = 30°$



Ma anche l'angolo di 150° ha il coseno uguale a $\frac{1}{2}$, quindi anche x = 150° è una soluzione.
Inoltre sono soluzioni anche gli angoli

$$x = 30 + 360° = 390°$$
$$x = 150° + 360° = 510°$$
$$x = 30° - 360° = -330°$$

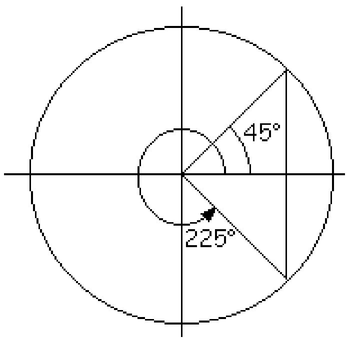
e così via.
Si possono indicare brevemente tutte le soluzioni nel modo seguente

$$x = 30° + k\ 360°$$
$$x = 150° + k\ 360°$$

con k uguale ad un qualsiasi numero intero (positivo o negativo).

ESEMPIO 15

$$2 \cdot \cos x - \sqrt{2} = 0$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x = 45°$$



Ma anche l'angolo x = 225° è una soluzione.
Inoltre, considerando anche le soluzioni dei cicli precedenti e di quelli successivi, si ha

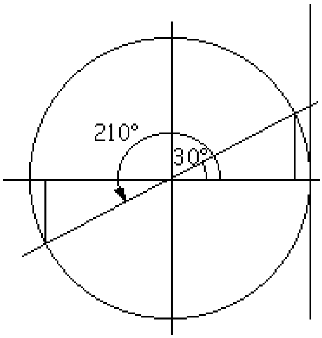
$$x = 45° + k\ 360°$$
$$x = 225° + k\ 360°$$

ESEMPIO 16

$$3 \cdot \tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 30°$$



Per la tangente e la cotangente, a differenza del seno e coseno, i valori si ripetono ogni 180°. Infatti anche l'angolo x = 30° + 180° = 210° è una soluzione.
E quindi tutte le soluzioni, comprese quelle dei cicli precedenti e successivi, sono

$$x = 30° + k\ 180°$$

N.B. Se il risultato non è un angolo notevole, si calcola il valore approssimato con la calcolatrice tascabile:

sen 25° = 0,422618…

arc cos 0,345 = 70° (circa)

Attenzione all'operazione contraria ! Può essere impossibile !
Per esempio:

arc sen 1,218 = impossibile

perché non esiste un angolo il cui coseno (o seno) sia maggiore di 1 !!

Passiamo alla soluzione delle disequazioni trigonometriche.

ESEMPIO 17

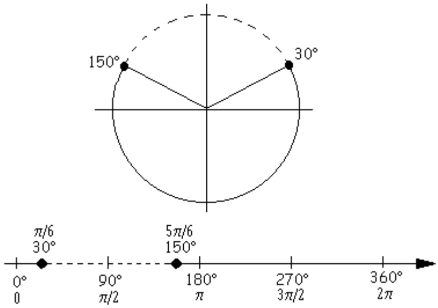
$$1-2\cdot \text{senx}\geq 0$$

Come nelle disequazioni algebriche si deve anzitutto risolvere l'**equazione associata**

$$1-2\cdot \text{senx}=0$$

per determinare gli **zeri** (i valori che annullano il primo membro).

Limitandoci a considerare solo gli angoli compresi fra 0° e 360°, si ha



Si hanno due zeri che delimitano due regioni in cui il primo membro della disequazione assume segni opposti.

Con un valore di prova si stabilisce quale sia la zona in cui l'espressione assume segno positivo e quale sia la zona in cui il segno è invece negativo.

Completato lo studio del segno si può stabilire quali siano le soluzioni.

Nel nostro caso l'espressione deve essere maggiore o uguale a zero, e quindi le soluzioni sono costituite dalle due zone

$$\begin{cases} 0° \leq x \leq 30° \\ 150° \leq x \leq 360° \end{cases}$$

Ma, tenendo presente che l'angolo di 150° equivale all'angolo –210°, possiamo unificare le due soluzioni scrivendo

$$-210° \le x \le 30°$$

Infine, ricordando che le soluzioni si prolungano all'infinito sia a destra che a sinistra, possiamo scrivere in modo più completo **tutte le soluzioni**

$$-210° + k \cdot 360° \le x \le 30° + k \cdot 360°$$

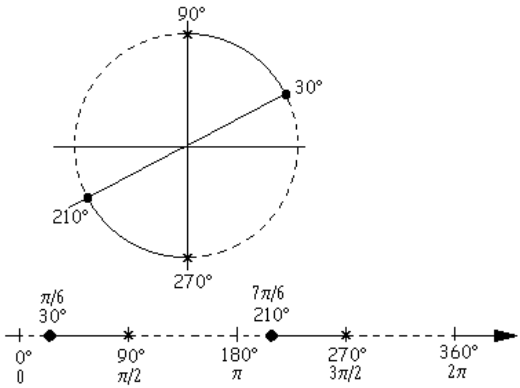
ESEMPIO 18

$$3 \cdot \tan x - \sqrt{3} \le 0$$

Anche qui cominciamo a trovare gli zeri dell'equazione associata

$$3 \cdot \tan x - \sqrt{3} = 0$$

Si ha



cioè due zeri (30° e 210°), ma esistono anche **due poli** (90° e 270°) in cui l'espressione diventa infinita.
Si hanno quattro zone, che in realtà si riducono a due se si considera che i valori della tangente si ripetono ogni 180°.
Con il solito valore di prova si stabiliscono in quali intervalli il primo membro della disequazione risulta positivo o negativo.

Sono soluzioni i valori corrispondenti alle zone tratteggiate, perché la disequazione ha il segno di $\leq$.
Tutte le soluzioni possono essere espresse con un' unica espressione
$90° < x \leq 210°$ o, in modo più completo
$90° + k \cdot 180° < x \leq 210° + k \cdot 180°$

Si noti che il segno di uguale appare solo in corrispondenza dei 210°, e non a 90° (perché per tale valore l'espressione è infinita e non nulla).

ESEMPIO 19

Se la disequazione è più complessa, si deve ricorrere (come per le disequazioni polinomiali) alla fattorizzazione dell'espressione per poter poi applicare la regola dei segni di Cartesio.
Si abbia

$$2 \cdot \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}x \geq 0$$

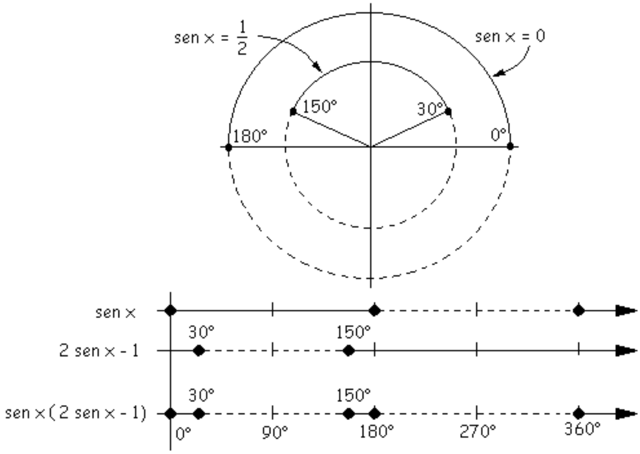
Consideriamo l'equazione associata e fattorizziamo

$$\mathrm{sen}x\left(2 \cdot \mathrm{sen}x - 1\right) = 0$$

Questa equazione è nulla quando è nullo il primo fattore o il secondo, quindi si può spezzare nelle due equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{sen}x = 0 \\ \mathrm{sen}x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Studiando il segno di ciascuna delle due espressioni a primo membro, si ha



L'ultima riga, ottenuta applicando la regola dei segni di Cartesio alle due righe precedenti, ci permette infine di ricavare le soluzioni della disequazione

$$\begin{cases} 0° \le x \le 30° \\ 150° \le x \le 180° \end{cases}$$

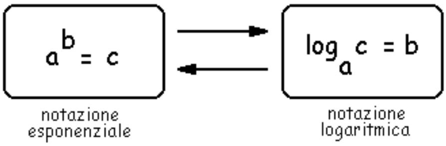
oppure, comprendendo anche i cicli precedenti e successivi

$$\begin{cases} 0° + k \cdot 360° \le x \le 30° + k \cdot 360° \\ 150° + k \cdot 360° \le x \le 180° + k \cdot 360° \end{cases}$$

CAP. 4 - LOGARITMI ED ESPONENZIALI

Par. 1 - La definizione di logaritmo

Data una espressione del tipo $\mathbf{a^b = c}$, che chiameremo **notazione esponenziale**, stabiliamo di scriverla anche in un modo diverso: $\mathbf{\log_a c = b}$ che chiameremo **notazione logaritmica** (e si legge “logaritmo in base **a** di **c** è uguale a **b**).



Questi sono due modi differenti per scrivere la stessa espressione.

Così per esempio $\log_3 81 = 4$ può essere scritta anche sotto la forma $3^4 = 81$.

Capiremo in seguito i vantaggi che si hanno scrivendo le espressioni in forma logaritmica.

Le basi più usate per i logaritmi sono il numero 10 (ed in questo caso si hanno i **logaritmi decimali**), ed il numero irrazionale e (e = 2,71… numero di Eulero. In questo caso i logaritmi si chiamano **naturali**).

Per evitare di scrivere la base talvolta si usa scrivere semplicemente **log** per i logaritmi decimali e **ln** per i logaritmi naturali.

Par. 2 - Le equazioni esponenziali

Si possono risolvere senza difficoltà solo se si riesce a trasformare l'equazione in modo da ottenere nei due membri due potenze che abbiano la stessa base o lo stesso esponente. Oppure utilizzando una variabile ausiliaria.
Chiariamo questi concetti con alcuni esempi.

ESEMPIO 20

$$3^{2x+1} = 27$$

Applicando le proprietà delle potenze si può scrivere

$$3^{2x+1} = 3^3$$

Poiché le due potenze hanno base uguale, i due membri sono uguali quando anche i due esponenti sono uguali, e perciò quando

$$2x - 1 = 3$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

ESEMPIO 21

$$2^{x+1} + 4^x = 80$$

Anche qui, sfruttando le proprietà delle potenze, si ha

$$2^{x+1} + \left(2^2\right)^x = 80$$

$$2^{x+1} + 2^{2x} = 80$$

$$2^x \cdot 2 + 2^{2x} = 80$$

Questa volta non è possibile agire come nell'esempio precedente: non sarà mai possibile trasformale l'equazione in modo da avere nei due membri due potenze con la stessa base.
Però possiamo ricorrere ad una **variabile ausiliaria**: se poniamo $\mathbf{y=2^x}$, tenendo presente che elevando al quadrato i due

membri di questa ultima espressione si ha $y^2=(2^x)^2$ cioè $\mathbf{y^2=2^{2x}}$, sostituendo si ottiene

$$2y+y^2=80$$

che è una semplice equazione di secondo grado. Risolvendola (con la formula ridotta), si ha

$$y^2+2y-80=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{1}=-1\pm 9$$

$$\begin{cases} y=8 \\ y=-10 \end{cases}$$

Ma queste due soluzioni si riferiscono alla variabile y, mentre a noi servono le soluzioni della variabile x.

Basta sostituire per ottenere

$$\begin{cases} 2^x=8 \\ 2^x=-10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x=2^3 \\ \text{impossibile} \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ \text{impossibile} \end{cases}$$

La seconda equazione è impossibile perché non c'è alcuna potenza di base 2 che abbia un risultato negativo.

E come si risolvono le equazioni esponenziali alle quali non si possono applicare i criteri visti in questi ultimi due esempi?

Questi casi (che rappresentano anche la maggioranza) si risolvono in genere per via approssimata con metodi che qui non ci interessano.

Se invece di una equazione esponenziale si ha una **disequazione esponenziale**, basta risolvere l'equazione associata per trovare gli zeri, e quindi determinare con i valori di prova, gli intervalli in cui i risultati sono positivi o negativi.

Par. 3 - Le equazioni logaritmiche

Anche le equazioni logaritmiche possono essere risolte solo in certi casi, con gli stessi accorgimenti suggeriti per le equazioni esponenziali. Altrimenti si devono usare metodi approssimati o la calcolatrice tascabile.
Vediamo alcuni esempi

ESEMPIO 22

$$\log_2 64 = x$$

Trasformiamo questa notazione logaritmica nella notazione esponenziale equivalente: si ha immediatamente

$$2^x = 64$$

$$2^x = 2^6$$

$$x = 6$$

ESEMPIO 23

$$\log_x 729 = 6$$

Trasformiamo anche questa notazione logaritmica nella notazione esponenziale equivalente

$$x^6 = 729$$

$$x^6 = 3^6$$

$$x = 3$$

ESEMPIO 24

$$\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$$

Come per le funzioni trigonometriche l'espressione $\log_5^2 x$ deve essere considerata come una forma abbreviata di $(\log_5 x)^2$.

Ponendo $y = \log_5 x$ si ha

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Passando dalle soluzioni per la y a quelle per la x, si ha

$$\begin{cases} \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5^2 = x \\ 5^{-1} = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 25 \\ x = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Se invece di una equazione logaritmica si ha una **disequazione logaritmica**, basta risolvere l'equazione associata per trovare gli zeri (e gli eventuali poli), e quindi determinare con i valori di prova, gli intervalli in cui i risultati sono positivi o negativi.

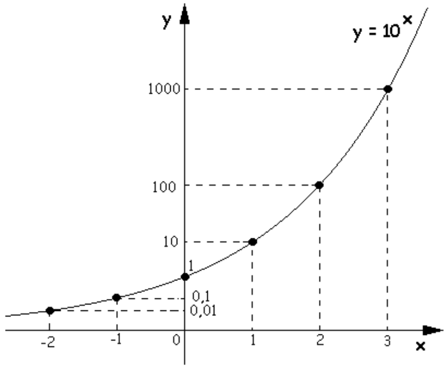
Par. 4 - La funzione esponenziale

Consideriamo la notazione esponenziale come una funzione, in cui c = y, b = x ed a = 10, essa diviene la funzione

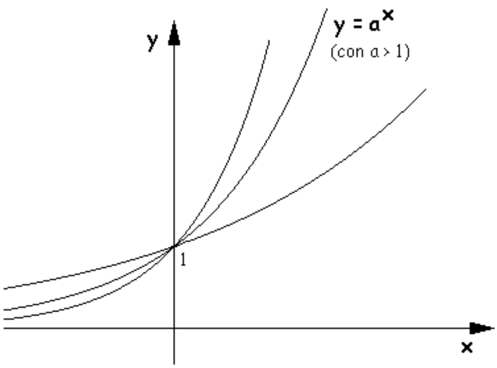
$$\mathbf{y = 10^x}$$

e determiniamo alcuni suoi punti ponendo x=1, 2, 3, -1, -2, ecc, allo scopo di poterla graficare.

Si ottiene la curva seguente



che ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle y positive, di attraversare l’asse y nel punto di ordinata 1, di tendere verso l’alto all’aumentare delle x, e di avvicinarsi sempre più all’asse x al diminuire delle x (cioè verso sinistra).
Occorre notare una caratteristica molto importante: se cambiamo la base e mettiamo al posto di 10 un qualsiasi altro numero (maggiore di 1), la curva mantiene le sue caratteristiche: varia solo la sua curvatura



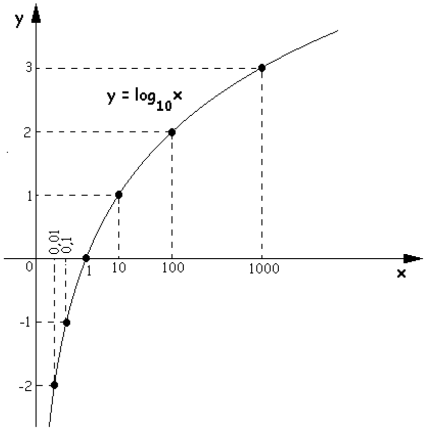
che ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle y positive, di attraversare l'asse y nel punto di ordinata 1, di tendere verso l'alto all'aumentare delle x, e di avvicinarsi sempre più all'asse x al diminuire delle x (cioè verso sinistra).

Par. 5 - La funzione logaritmica

In modo analogo a quanto fatto per la notazione esponenziale, consideriamo anche la notazione logaritmica come una funzione, in cui c = x, b = y ed a = 10, essa diviene la funzione

$$\mathbf{y = \log_{10} x}$$

determiniamo alcuni suoi punti ponendo x = 1, 2, 3, -1, -2, ecc, e otteniamo la curva seguente



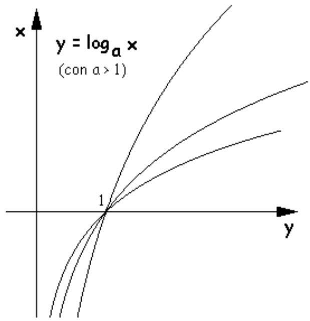
che ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle x positive, di attraversare l'asse x nel punto di ascissa 1, di tendere verso l'alto all'aumentare delle x, e di avvicinarsi sempre più all'asse y quando la x tende a zero.

Si noti che

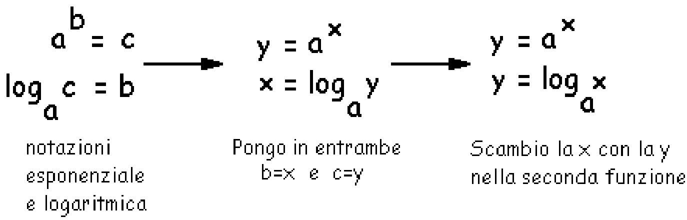
- La funzione non esiste per x negative, quindi il logaritmo di un numero negativo non esiste.

- La funzione assume valore -∞ per x = 0.
- La funzione ha valori negativi per x compreso fra 0 ed 1.
- La funzione è nulla per x = 1
- La funzione assume valori positivi per x maggiore di 1.

Anche per la funzione logaritmica, se cambiamo la base e mettiamo al posto di 10 un qualsiasi altro numero (maggiore di 1), la curva mantiene le sue caratteristiche: varia solo la sua curvatura

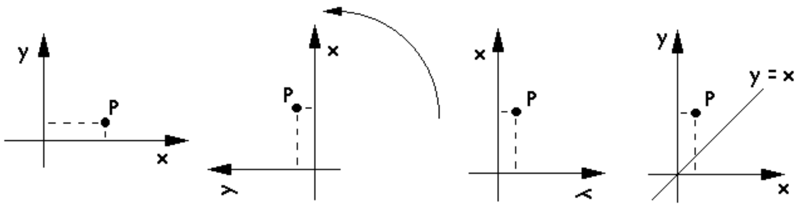


Notiamo ora una caratteristica molto importante che lega fra loro le funzioni esponenziale e logaritmica.
Partiamo dalle due notazioni iniziali, ed in entrambe operiamo la stessa sostituzione (b = x e c = y)

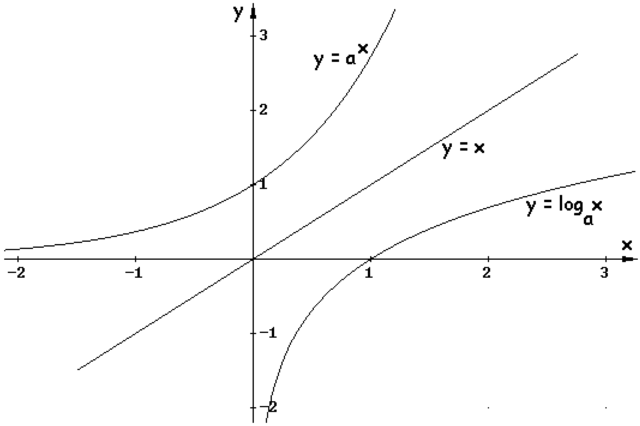


Le due funzioni che si ottengono (passaggio intermedio), rappresentano due modi diversi per scrivere **la stessa funzione**.

Se ora scambiamo la x con la y nella seconda funzione (ultimo passaggio a destra), si ottengono esattamente la funzione esponenziale e quella logaritmica.
Ma dal punto di vista grafico cosa significa scambiare la x con la y?
Osserviamo le fasi illustrate qui sotto



Partendo dal primo grafico realizziamo una rotazione di 90° in verso antiorario (secondo grafico).
Poi eseguiamo una riflessione attorno all'asse verticale (terzo grafico).
Infine scambiamo la x con la y (quarto grafico).
Abbiamo ottenuto lo scambio fra i due assi e confrontando il primo grafico con l'ultimo, ci accorgiamo che in realtà abbiamo effettuato un ribaltamento di 180° attorno alla bisettrice y = x.
Il punto P serve solo per rendere più evidente lo spostamento.
Con le funzioni esponenziale e logaritmica abbiamo eseguito proprio una operazione di questo tipo per passare da una all'altra. Si dice in questo caso che le due funzioni sono una **inversa** rispetto all'altra.
La relazione importante che le lega è appunto questa: si può passare da una all'altra semplicemente effettuando un ribaltamento di 180° rispetto alla retta y = x



Par. 6 - Le proprietà dei logaritmi

1. Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli termini della somma

$$\boxed{\log_n(A \cdot B) = \log_n A + \log_n B}$$

Infatti ponendo $\begin{cases} \log_n A = x \\ \log_n B = y \end{cases}$ e trasformando le due notazioni logaritmiche in esponenziali, si ha $\begin{cases} n^x = A \\ n^y = B \end{cases}$ e, moltiplicando membro a membro le due relazioni, si ha

$$n^x \cdot n^y = A \cdot B$$

$$n^{x+y} = A \cdot B$$

riportando questa notazione esponenziale in forma logaritmica si ottiene

$$\log_n(A \cdot B) = x + y \quad \text{cioè}$$

$$\log_n(A \cdot B) = \log_n A + \log_n B$$

2. Il logaritmo di un rapporto è uguale alla differenza fra il logaritmo del numeratore e il logaritmo del denominatore

$$\boxed{\log_n\left(\frac{A}{B}\right)=\log_n A-\log_n B}$$

Infatti ponendo $\begin{cases}\log_n A = x \\ \log_n B = y\end{cases}$ e trasformando le due notazioni logaritmiche in esponenziali, si ha $\begin{cases}n^x = A \\ n^y = B\end{cases}$ e, dividendo membro a membro le due relazioni, si ha

$$\frac{n^x}{n^y}=\frac{A}{B}$$

$$n^{x-y}=\frac{A}{B}$$

riportando questa notazione esponenziale in forma logaritmica si ottiene

$$\log_n\left(\frac{A}{B}\right)=x-y \quad \text{cioè}$$

$$\log_n\left(\frac{A}{B}\right)=\log_n A-\log_n B$$

3. Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto del logaritmo della base per l'esponente

$$\boxed{\log_n A^s = s\cdot\log_n A}$$

Infatti ponendo $\log_n A = x$ e trasformando la notazione logaritmica in esponenziale, si ha $n^x = A$ e, elevando ad s entrambi i membri, si ha

$$\left(n^x\right)^s = A^s$$

$$n^{s \cdot x} = A^s$$

riportando questa notazione esponenziale in forma logaritmica si ottiene

$$\log_n\left(A^s\right) = s \cdot x \qquad \text{cioè}$$

$$\log_n\left(A^s\right) = s \cdot \log_n A$$

4. Il logaritmo di un radicale è uguale al rapporto fra il logaritmo del radicando e l'indice della radice

$$\boxed{\log_n \sqrt[s]{A} = \frac{\log_n A}{s}}$$

Infatti per una proprietà delle potenze possiamo scrivere

$$\log_n \sqrt[s]{A} = \log_n A^{\frac{1}{s}}$$

e quindi applicare la proprietà precedente

$$\log_n A^{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s}\log_n A = \frac{\log_n A}{s}$$

5. Poniamo $\log_a b = x$ e $\log_b c = y$ (che si possono scrivere rispettivamente anche nella forma $a^x = b$ e $b^y = c$).

Ora eleviamo ad y entrambi i membri di $a^x = b$

$$\left(a^x\right)^y = b^y$$

$$a^{x \cdot y} = b^y$$

passando alla notazione logaritmica, abbiamo

$$\log_a b^y = x \cdot y$$

che, con semplici sostituzioni, si può scrivere anche nel modo seguente

$$\boxed{\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c}$$

Quest'ultima proprietà è molto importante perché permette di passare dai logaritmi con una base ai logaritmi con una base differente.
Per esempio, se poniamo a = 10 e b = e (numero di Eulero), la proprietà in cornice permette di scrivere

$$\log_{10} n = \log_{10} e \cdot \log_e n$$

in cui il $\log_{10} e = 0{,}4343\ldots$ e perciò

$$\boxed{\log_{10} n = 0{,}4343 \cdot \log_e n}$$

Quindi si può passare dai logaritmi con una base a quelli con una base diversa, semplicemente moltiplicando per una costante.
Da questa quinta proprietà si può ricavare anche un'altra importante conseguenza: se poniamo
c = a si ha

$$\log_a a = \log_a b \cdot \log_b a$$

Ma è $\log_a a = 1$ (dalla definizione di logaritmo), e perciò

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a$$

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Questa relazione ci permette di scambiare la base **a** dei logaritmi con l'argomento **b**.
Concludiamo questa rassegna sulle proprietà con altre due semplici osservazioni che derivano direttamente dalla definizione di logaritmo:

$$\boxed{\log_a a^n = n \qquad \text{ed anche} \qquad a^{\log_a b} = b}$$

Infine, come per le funzioni trigonometriche, si può presentare la necessità di modificare l'espressione

$y = \log_a x$ esplicitando rispetto alla x, ma senza passare alla notazione esponenziale.
In questo caso si usa l'espressione simbolica $x = \text{antilog}_a\, y$.
Per esempio, se

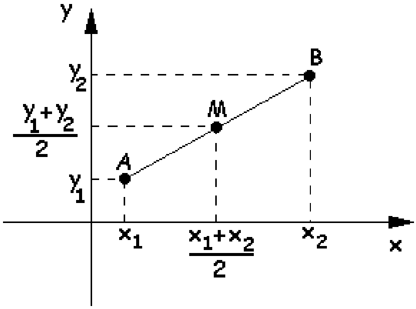
$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \text{allora si può scrivere} \quad \text{antilog}_{10} 3 = 1000$$

Le due espressioni sono perfettamente equivalenti e rappresentano soltanto due modi diversi per scrivere la stessa cosa.

CAP. 5 - GEOMETRIA ANALITICA

Par. 1 - Prime formule

Punto medio fra due punti



Dati due punti A e B di coordinate $A \equiv (x_1;y_1)$ $B \equiv (x_2;y_2)$

le coordinate del punto medio M si trovano facendo la media aritmetica fra le ascisse e fra le ordinate dei due punti.

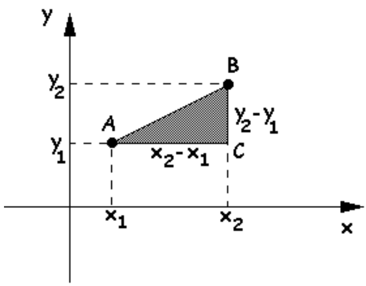
Si ottiene

$$\boxed{M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)}$$

Distanza fra due punti

Se si desidera invece la distanza AB fra i due punti, basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo ABC.
Si ha

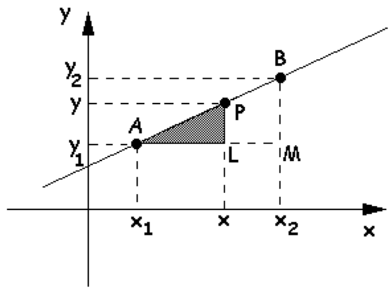
$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



Equazione retta passante per due punti

Dati, al solito, due punti A e B di coordinate

$$A \equiv (x_1; y_1) \qquad B \equiv (x_2; y_2)$$



per essi passa una ed una sola retta.

La sua equazione si trova applicando una proporzione fra i due triangoli simili APL e ABM.

Il punto P con coordinate (x;y) deve essere considerato come un punto mobile che scorre sulla retta, al contrario di A e B che sono fissi.

Le coordinate di A e B sono quindi costituite da valori numerici noti, mentre le coordinate di P sono le variabili x ed y della retta.

Stabiliamo quindi la proporzione fra i due triangoli APL e ABM:

$$PL : BM = AL : AM$$

(1)
$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

ESEMPIO 25

Sia $A \equiv (2;1) \quad B \equiv (5;3)$.

Applicando la formula si ha

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{5-2}$$

$$\frac{y-1}{2} = \frac{x-2}{3}$$

$$3y - 3 = 2x - 4$$

$$3y - 2x + 1 = 0$$

$$2x - 3y - 1 = 0$$

Par. 2 - Equazione della retta

Dall'esempio precedente si vede come l'equazione di una retta corrisponda ad **una equazione di primo grado con due incognite x ed y**.

In generale possiamo quindi affermare che ogni retta può essere scritta nella forma

$$\boxed{\mathbf{ax + by + c = 0}}$$

detta anche forma implicita.

Si usa spesso scriverla anche in **forma esplicita**, cioè con la y al primo membro e tutto il resto nel secondo

$$\boxed{\mathbf{y = mx + q}}$$

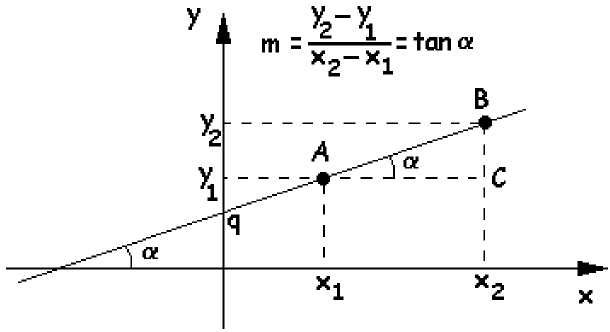
Nell'esempio precedente la forma esplicita sarebbe

$$3y = 2x - 1$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

La forma esplicita è spesso più comoda da usare perché i coefficienti **m** e **q** hanno un particolare significato grafico.

Il primo viene detto **coefficiente angolare**, perché esprime l'inclinazione della retta rispetto all'asse x.



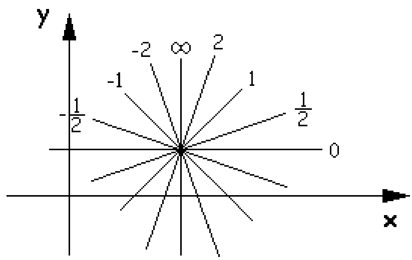
Dalla figura precedente si vede che il coefficiente angolare corrisponde al rapporto BC su AC, cioè alla tangente dell'angolo α che la retta forma con l'asse x.

(2) $$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Il termine noto **q** invece viene detto **ordinata all'origine**, perché rappresenta la distanza fra l'origine e il punto in cui la retta taglia l'asse y.

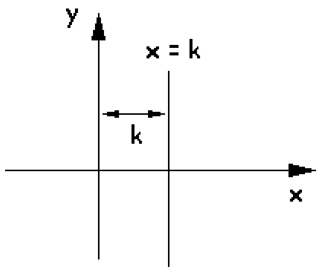
A seconda dei valori del coefficiente angolare la retta può essere inclinata verso l'alto (valori positivi di m) o verso il basso (valori negativi di m).

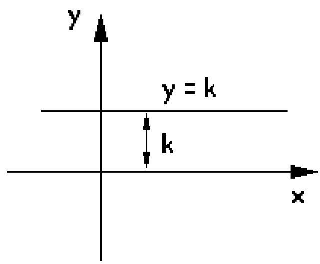
Una retta **orizzontale** ha coefficiente angolare **nullo**, mentre una retta **verticale** ha coefficiente angolare **infinito**.



Confrontando fra loro due rette, quella con coefficiente angolare maggiore sarà più inclinata verso l'alto.

Un aspetto particolare assumono le rette parallele agli assi coordinati.





Le rette **parallele all'asse y** hanno la forma

$$\mathbf{x = k}$$

(in cui k rappresenta la distanza dall'asse y).
In particolare la retta coincidente con l'asse y ha equazione

$$\mathbf{x = 0}$$

Invece le rette **parallele all'asse x** hanno la forma

$$\mathbf{y = k}$$

(in cui k rappresenta la distanza dall'asse x).
In particolare la retta coincidente con l'asse y ha equazione

$$\mathbf{y = 0}$$

Se si vuole tracciare una retta conoscendo la sua equazione, basta trovare alcuni suoi punti (ne bastano due), assegnando un valore a piacere ad una variabile e calcolando il corrispondente valore dell'altra.
Si ottengono coordinate dei punti della retta che, riportate sul piano cartesiano permetteranno di tracciare la retta stessa.
Per esempio, nella retta $3y = 2x - 1$ si ottengono i seguenti valori

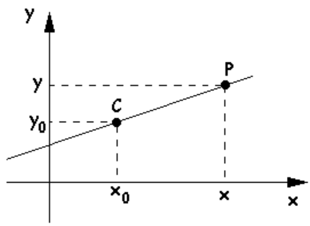
x	2	5	0	1	$\frac{1}{2}$	....
y	1	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	....

Nella prima coppia si riconoscono le coordinate dei due punti che sono serviti per ricavare l'equazione della retta.
Infine, se si mettono a sistema le equazioni di due rette e si risolve il sistema, si ottengono le coordinate dell'unico punto che le due rette hanno in comune (a meno che le due rette non siano parallele o coincidenti).

Par. 3 - Ancora sulle rette

Fasci di rette

Dato un punto C di coordinate $(x_0;y_0)$, per esso passano infinite rette che prendono il nome di **fascio di rette**.
L'equazione del fascio di rette si può ricavare dalla (2) applicata al punto C e ad un generico punto P con coordinate (x;y).



Mentre il punto C ha come coordinate due valori numerici noti, il punto P ha come coordinate due variabili: la (2) diviene allora

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y = mx - mx_0 + y_0$$

che è l'equazione di una retta che, al variare di m (x_0 e y_0 sono noti), fornisce ogni volta una retta passante per C, ma con una inclinazione diversa.

ESEMPIO 26

Dato il punto $C \equiv (3;2)$ scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per C. Si ha

$$m = \frac{y-3}{x-2}$$

$$y - 3 = m \cdot (x-2)$$

$$y = mx - 2m + 3$$

Per esempio, quando m = 1 si ha la retta

$$y = x + 1$$

passante per C ed inclinata di 45° verso l'alto.

Quando $m = \sqrt{3}$ si ha la retta

$$y = \sqrt{3} \cdot m - 2\sqrt{3} + 3$$

passante per C ed inclinata di 60° verso l'alto ($m = \tan\alpha = \sqrt{3}$ e perciò $\alpha = 60°$).

Parallelismo e perpendicolarità fra rette

Due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare

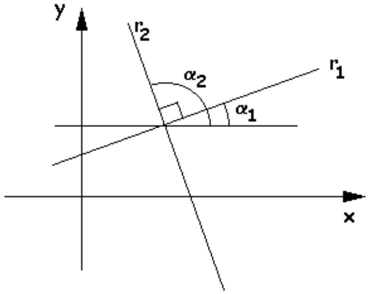
$$\boxed{m_2 = m_1}$$

in quanto se hanno lo stesso coefficiente angolare, hanno anche lo stesso angolo di inclinazione rispetto all'asse x, e quindi sono parallele fra loro.

Sono invece perpendicolari fra loro se

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

Infatti date due rette r_1 e r_2 perpendicolari fra loro, siano α_1 e α_2 i due angoli che esse formano con l'asse x (con $\alpha_1 < \alpha_2$).



Risulta

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

e perciò possiamo scrivere

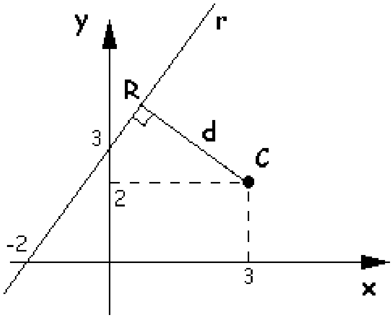
$$m_2 = \tan\alpha_2 = \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\alpha_1 \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} = -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

Distanza di un punto da una retta

Dato un punto C con coordinate $(x_0;y_0)$, ed una retta r di equazione $ax + by + c = 0$, la distanza del punto C dalla retta è



$$\boxed{d = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

Il risultato va preso in modulo, nel senso che quando il risultato è negativo, il segno meno va eliminato.

ESEMPIO 27

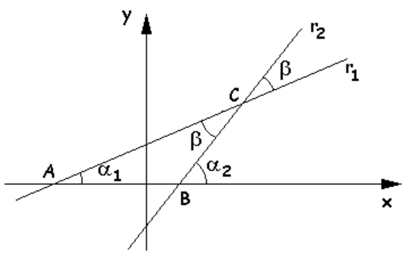
Sia $C \equiv (3;2)$ ed r $\rightarrow$ $3x - 2y + 6 = 0$

Avremo

$$d = RC = \left|\frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 6}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = \left|\frac{11}{\sqrt{13}}\right| = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

Angolo fra due rette

Date due rette r_1 e r_2, siano α_1 e α_2 i due angoli che esse formano con l'asse x, e β l'angolo fra le due rette.



Consideriamo il triangolo ABC: per un noto teorema di geometria si ha

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$$

(in quanto un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti).
Risulta quindi

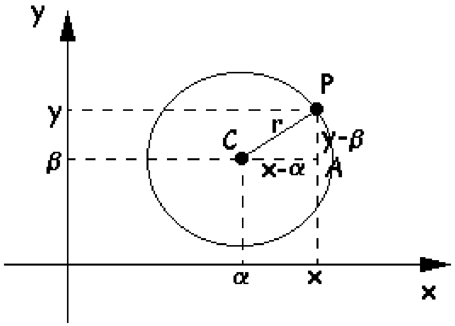
$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\tan\beta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan\beta = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_2}$$

$$\boxed{\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}}$$

Par. 4 - La circonferenza



Sia dato un punto $C \equiv (\alpha;\beta)$ fisso ed un punto variabile $P \equiv (x;y)$.
Si forma (qualunque sia la posizione di P), il triangolo ACP (con ipotenusa costante ed uguale ad r).
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$

Questa equazione, in cui **α**, **β** ed **r** rappresentano valori numerici noti, mentre **x** ed **y** sono le variabili (coordinate del

punto P che descrive la circonferenza), è l'**equazione della circonferenza**.
Tale equazione, sviluppando, si può anche scrivere nella forma

$$x^2 - 2\alpha \cdot x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta \cdot y + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha \cdot x - 2\beta \cdot y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

in cui ponendo

$$-2\alpha = a$$

$$-2\beta = b$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

si ottiene

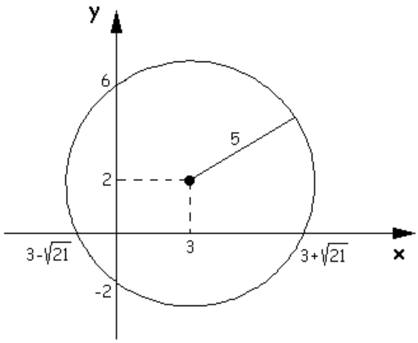
(3) $$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

Più in generale possiamo affermare che ogni equazione del tipo

(4) $$\boxed{Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0}$$

Infatti dividendo i due membri della (4) per A si riottiene la (3), che chiameremo **forma standard** della circonferenza.
Si tenga però presente che la (3) o la (4) possono anche portare a **circonferenze degeneri**: un punto (se il raggio è nullo) o a nessun grafico (se il raggio è immaginario).

ESEMPIO 28



Sia $C(3;2)$ ed r = 5

La circonferenza corrispondente è

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 25$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

Si possono calcolare le intersezioni con gli assi coordinati mettendo a sistema l'equazione della circonferenza prima con l'asse x (y = 0) e poi con l'asse y (x = 0)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

si ottiene per l'asse x

$$x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9+12} = 3 \pm \sqrt{21}$$

e, per l'asse y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

cioè

$$y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$y = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm 4 = \left\langle \begin{array}{c} 6 \\ -2 \end{array} \right.$$

ESEMPIO 29

Data l'equazione

$$16x^2 + 16y^2 + 40x + 16y - 7 = 0$$

Determinare le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza.

Cominciamo dividendo i due membri per 16

$$x^2 + y^2 + \frac{40}{16}x + \frac{16}{16}y - \frac{7}{16} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + y - \frac{7}{16} = 0$$

La circonferenza è ora in forma standard.

Si ha

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{2} = -2\alpha \\ 1 = -2\beta \\ -\frac{7}{16} = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{5}{4} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{16} = \frac{25}{16} + \frac{1}{4} - r^2 \end{cases}$$

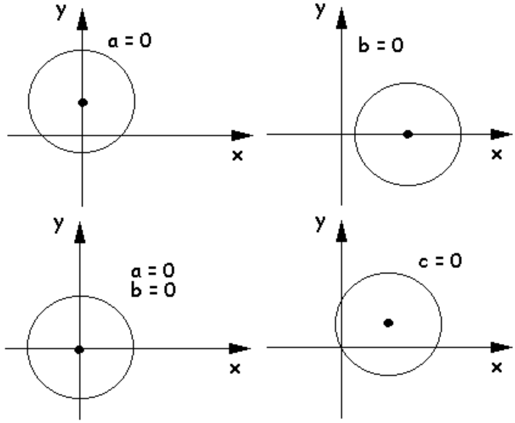
$$\begin{cases} \alpha = -\frac{5}{4} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ r^2 = \frac{25}{16} + \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \end{cases}$$

da cui finalmente

$$C \equiv \left(-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2} \right) \qquad r^2 = \frac{36}{16} \quad \rightarrow \quad r = \frac{3}{2}$$

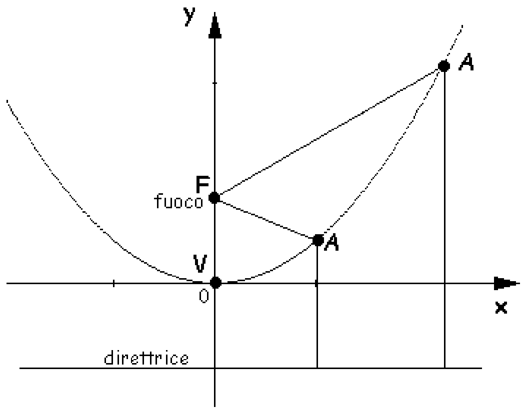
Le circonferenze degeneri

Con riferimento alla forma standard (3), cosa avviene se sono nulli alcuni coefficienti?



- Nel caso che sia a = 0 risulta anche $\alpha = 0$, quindi l'ascissa del centro è nulla e la circonferenza ha il centro sull'asse y.
- Nel caso che sia b = 0 risulta anche $\beta = 0$, quindi l'ordinata del centro è nulla e la circonferenza ha il centro sull'asse x.
- Nel caso che sia a = 0 e b =0, risultano contemporaneamente $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, quindi sia l'ascissa che l'ordinata del centro sono nulle e la circonferenza ha il centro nell'origine.
- Nel caso che sia c = 0 la circonferenza passa per l'origine perché il punto con coordinate (0;0) soddisfa sempre l'equazione.

Par. 5 - La parabola

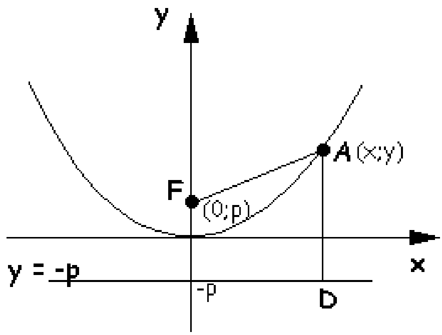


Data una retta d (detta **direttrice**) ed un punto F (detto **fuoco**) non appartenente ad essa, la parabola è il luogo di punti (cioè l'insieme di punti) per i quali la distanza da F è sempre uguale alla distanza da d.

Nella figura a fianco si può vedere infatti che per i punti A tale proprietà è verificata.

La parabola ha un asse di simmetria ed il punto **V** dell'asse di simmetria che taglia la parabola si chiama **vertice**.

Una parabola come quella disegnata a fianco (con il vertice coincidente con l'origine degli assi, ed asse di simmetria coincidente con uno degli assi coordinati, prende il nome di **parabola standard**.



Per la proprietà precedente dei punti della parabola, la distanza del vertice dal fuoco è sempre uguale alla distanza del vertice dalla direttrice.

Ricaviamo ora l'equazione della parabola standard.
Sia dato un punto $F \equiv (0;p)$, una retta orizzontale di equazione y = -p, ed un punto generico del piano $A \equiv (x;y)$.
Si ha

$$FA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2}$$
$$AD = y + p$$

Imponiamo ora che sia FA = AD

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2} = y + p$$

eleviamo al quadrato entrambi i membri e semplifichiamo

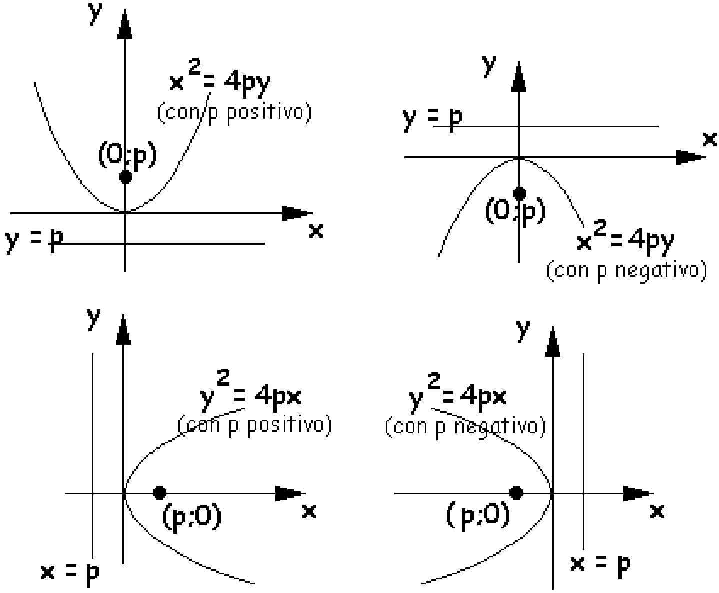
$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2} = y + p$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

che è l'equazione della parabola standard.
Possiamo avere quattro parabole standard diverse:

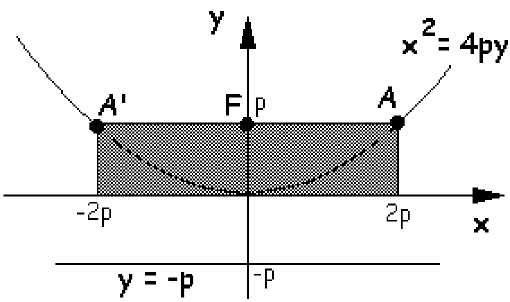
- $x^2 = 4py$ (con p positivo)
- $x^2 = 4py$ (con p negativo)
- $y^2 = 4px$ (con p positivo)
- $y^2 = -4px$ (con p negativo)

La prima è quella che abbiamo appena ricavato, con la concavità rivolta verso l'alto.
La seconda si ottiene dalla precedente cambiando y con –y (cioè cambiando segno a tutte le ordinate). Quindi si ottiene la parabola simmetrica alla prima rispetto all'asse x, con la concavità rivolta verso il basso.
La terza equazione si ottiene dalla prima scambiando fra loro le x con le y: questo equivale a ruotare la parabola rispetto alla

bisettrice y = x, e si ha una parabola con concavità rivolta a destra.
Infine la quarta equazione si ottiene dalla terza cambiando x con –x (cioè cambiando segno a tutte le ascisse). Si ottiene la parabola simmetrica alla precedente rispetto all’asse y, con la concavità rivolta a sinistra.
Queste considerazioni appaiono chiare se si osservano le figure seguenti



Data una parabola standard (per esempio, la prima, in cui supponiamo che p sia positivo), se in essa poniamo $x = \pm 2p$, l’ordinata corrispondente è in entrambi i casi

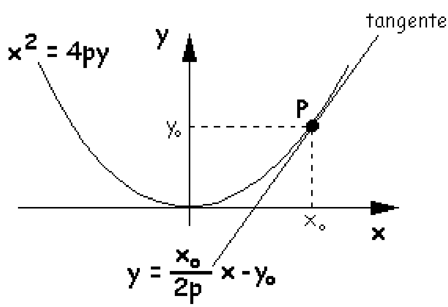


y = p.
E' possibile allora tracciare il rettangolo ombreggiato (nella figura a fianco), che chiameremo **rettangolo caratteristico** della parabola, avente base 4p ed altezza p.
Questo rettangolo può risultare utile quando si deve disegnare una parabola partendo dalla sua equazione, perché permette di individuare immediatamente e senza calcoli i due punti A e A' della parabola.
Riassumendo, quando si ha l'equazione di una parabola standard, le operazioni da fare per disegnarla sono le seguenti:

1. L'asse di simmetria della parabola coincide con la variabile di primo grado.
2. Se il coefficiente di tale variabile è positivo, la concavità della parabola è rivolta nel verso in cui l'asse coordinato (che è anche di simmetria) è crescente.
3. Si calcola p e si disegna il rettangolo caratteristico: a questo punto è facile individuare i due punti A e A' (vedi figura precedente), il vertice, il fuoco e la direttrice.
4. Si traccia la parabola usando come riferimenti i punti precedenti.

Retta tangente ad una parabola standard

Data una parabola standard del tipo $x^2 = 4py$ ed un suo punto $P \equiv (x_0; y_0)$, l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto P è data dall'equazione

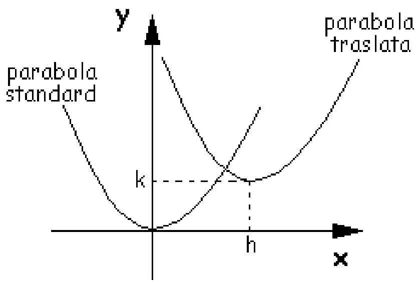


$$\boxed{y = \frac{x_0}{2p}x - y_0}$$

Nel caso in cui la parabola standard sia del tipo $y^2 = 4px$, non conviene fornire la formula generale delle corrispondenti rette tangenti, perché di scarso uso pratico e meno semplici.

Parabola generica con asse verticale

Data una parabola standard, per esempio $x^2 = 4py$, per cominciare preferiamo scriverla nella forma $y = \frac{x^2}{4p}$, più comoda perché del tipo y = f(x) che è quella usata normalmente.



Ora imponiamo una traslazione alla parabola in modo che il vertice si sposti dall'origine al punto $V \equiv (h;k)$.

Basterà sostituire ad $x \quad \to \quad (x-h)$ e ad

$$y \quad \to \quad (y-k)$$

La parabola traslata assume quindi la forma seguente

$$(y-k) = \frac{(x-h)^2}{4p}$$

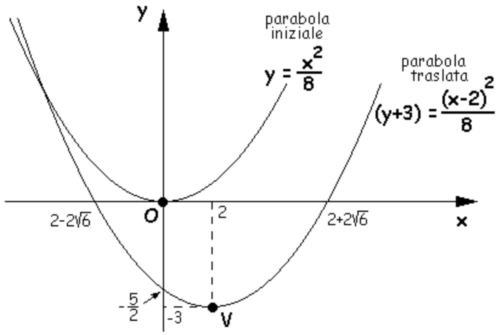
che, sviluppata e semplificata, si riduce ad una equazione del tipo y = f(x) in cui il secondo membro è una equazione di secondo grado

(5) $$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Data una parabola nella forma (5) l'ascissa del vertice si può trovare con la formula

(6) $$\boxed{V_x = -\frac{b}{2a}}$$

L'ordinata si ottiene semplicemente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.
Si noti che con la traslazione il coefficiente della x^2 rimane invariato. Quindi in ogni caso (parabola standard o traslata), il segno del coefficiente di x^2 ci rivela subito se la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso.



ESEMPIO 30

Data la parabola $y = \frac{x^2}{8}$
realizziamo una traslazione in modo che il vertice passi dall'origine al punto

$$V \equiv (2;-3)$$

Si ottiene

$$(y+3) = \frac{(x-2)^2}{8}$$

Sviluppando e semplificando si ottiene

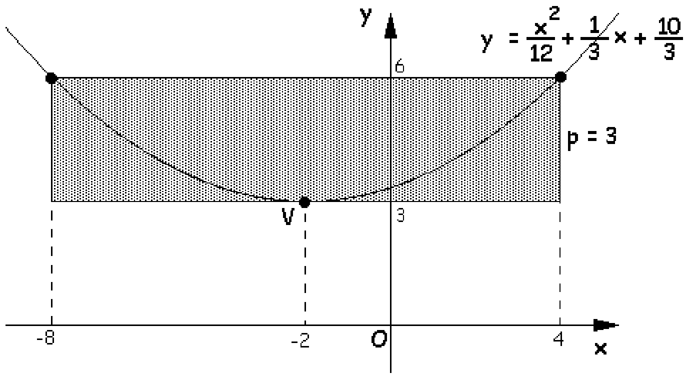
$$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

che è appunto come la (5).
Le intersezioni con gli assi si trovano ponendo alternativamente x ed y uguali a zero

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{5}{2}$$

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \pm 2\sqrt{6}$$

ESEMPIO 31



Data la parabola $y = \frac{x^2}{12} + \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ proviamo a disegnarla.
Calcoliamo l'ascissa del vertice:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{12}} = -\frac{1}{3} \cdot 6 = -2$$

L'ordinata è allora: $V_y = \frac{4}{12} - \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{4 - 8 + 40}{12} = \frac{36}{12} = 3$

La parabola ha la concavità rivolta verso l'alto perché il coefficiente del termine di x^2 è positivo.

Del resto tale coefficiente è uguale a quello della corrispondente parabola standard (cioè la parabola traslata in modo che il suo vertice coincida con l'origine O), e quindi risulta

$$4p = 12 \quad \rightarrow \quad p = 3$$

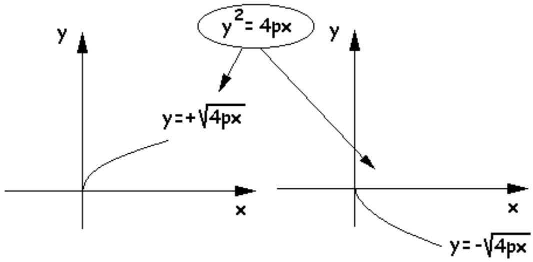
A questo punto è possibile tracciare il rettangolo caratteristico della parabola (vedi figura), ed individuare altri due suoi punti in modo da poterla disegnare con buona approssimazione.

Parabola generica con asse orizzontale

Consideriamo ora la parabola standard con asse orizzontale

$$y^2 = 4px$$

ed esplicitiamola rispetto alla y: per effetto della estrazione di radice essa dà luogo a due differenti funzioni (vedi figura a fianco). Lo stesso accade per l'equazione che si ottiene dopo una traslazione generica.



Infatti, effettuata la traslazione, dopo aver sviluppato e semplificato l'equazione, questa si riduce ad una equazione del tipo x = f(y) in cui il secondo membro è una equazione di secondo grado

(6) $$\boxed{x = ay^2 + by + c}$$

Esplicitando la y ed estraendo la radice si ottengono ancora due semiparabole: la metà superiore e la metà inferiore.

Questa volta l'ordinata del vertice si può trovare con la formula

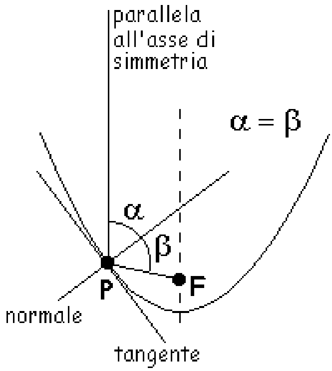
(7) $$\boxed{V_y = -\frac{b}{2a}}$$

L'ascissa si ottiene semplicemente sostituendo l'ordinata nell'equazione della parabola.
Anche qui con la traslazione il coefficiente della y^2 rimane invariato. Quindi in ogni caso (parabola standard o traslata), il segno del coefficiente di y^2 ci rivela subito se la parabola ha la concavità rivolta verso destra o verso sinistra.

Due utili proprietà

Per concludere accenniamo a due interessanti ed utili proprietà della parabola.

1. Se realizziamo uno specchio parabolico ottenuto facendo ruotare una parabola attorno al proprio asse di simmetria, ogni raggio luminoso parallelo all'asse di simmetria viene riflesso in modo da passare per il fuoco.



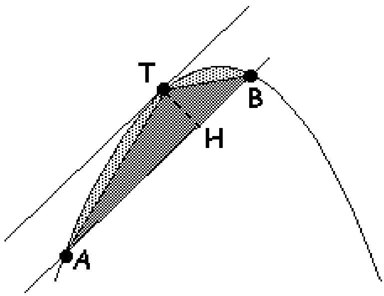
Al contrario tutti i raggi luminosi che escono dal fuoco vengono deviati dalla parabola in modo da uscire paralleli all'asse di simmetria.
In altre parole i due angoli α e β (angoli di incidenza e di riflessione) sono sempre uguali fra loro.
Per esempio, i fari delle auto hanno una forma parabolica proprio per questa ragione: una lampadina posizionata nel fuoco dà luogo ad un fascio di luce con raggi molto collimati e quasi paralleli fra loro.

2. Data una parabola ed una retta che la interseca, tracciamo la retta tangente parallela ad AB e sia T il punto di tangenza.

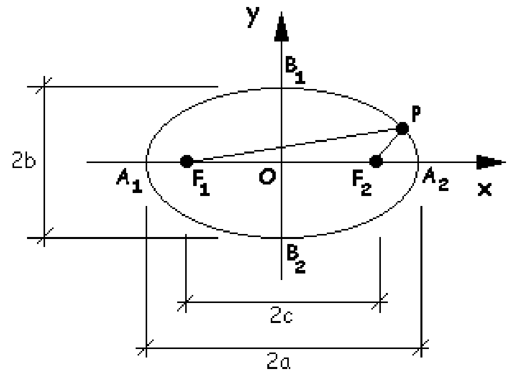
Esiste una relazione molto semplice fra l'area del triangolo ABT e l'area del segmento parabolico ombreggiato nella figura

$$\boxed{S_{ABT} = \frac{3}{4} S_{\text{segmento parabolico}}}$$

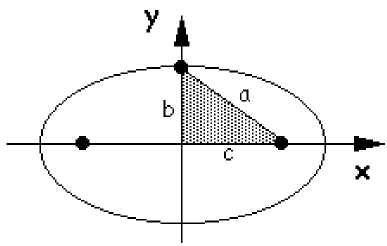
Questa relazione fu trovata da Archimede.



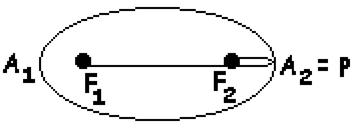
Par. 6 - L’ellisse

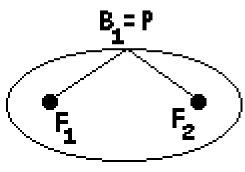


Dati due punti F_1 e F_2 (detti **fuochi**), l’ellisse è il luogo di punti (cioè l’insieme di punti) P per i quali la somma delle distanze $PF_1 + PF_2$ è sempre costante.
Il segmento A_1 A_2 si chiama **asse maggiore** e si pone uguale a **2a**.
Il segmento B_1 B_2 si chiama **asse minore** e si pone uguale a **2b**.
Il segmento F_1 F_2 si chiama **distanza focale** e si pone uguale a **2c**.



Fissando una cordicella fra due punti fissi F_1 e F_2, ponendo una punta scrivente in P, facendola scorrere avanti e indietro (avendo cura di mantenere sempre tesa la cordicella), il punto P descriverà una ellisse perfetta.





Questo metodo grafico per tracciare una ellisse viene detto metodo del giardiniere perché veniva usato per tracciare delle aiuole di forma ellittica.

Se ora facciamo coincidere il punto P con A_2 possiamo notare (vedi figura) che per ragioni di simmetria il tratto di cordicella sovrapposta F_2A_2, corrisponde esattamente al tratto F_1A_1.
Quindi la lunghezza della cordicella è esattamente uguale all'asse maggiore, e possiamo scrivere

(8) $$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

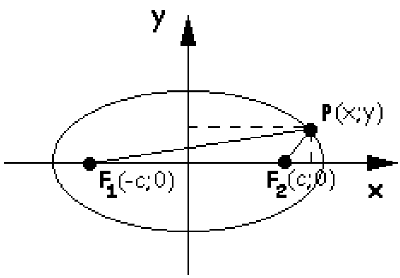
Inoltre se il punto P coincide con B_1 la cordicella è divisa in due parti uguali e quindi

$B_1F_2 = a$

Nell'ellisse possiamo dunque costruire un triangolo (detto **triangolo caratteristico** dell'ellisse), al quale possiamo applicare il teorema di Pitagora

(9) $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Dopo queste premesse possiamo passare al procedimento per ricavare l'equazione dell'ellisse.



Consideriamo l'ellisse posta come in figura (con i fuochi su un asse coordinato ed in posizione simmetrica rispetto all'origine).
Sia P un punto con coordinate variabili (x;y).
Dalla (9) si ottiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Sviluppando, quadrando e semplificando, si ottiene

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Quadrando ancora e semplificando

$$a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Dalla (9) si ha $a^2-c^2=b^2$, e perciò

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

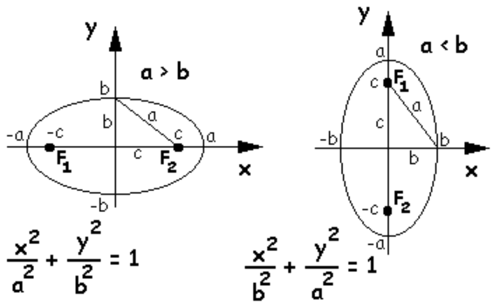
e finalmente, dividendo entrambi i membri per a^2b^2, si ottiene

(10) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

che è l'equazione dell'**ellisse in forma standard**.
Il **grado di schiacciamento** dell'ellisse è dato dal rapporto

$$\boxed{e=\frac{c}{a}}$$

che si chiama **eccentricità**.
Tale valore numerico è sempre compreso fra 0 ed 1. Infatti non può essere un valore



negativo in quanto è il rapporto fra due segmenti positivi, ed inoltre è sempre c < a perché c è il cateto del triangolo caratteristico, mentre a è l'ipotenusa.
Due ellissi con lo stesso valore della caratteristica devono avere i triangoli caratteristici uguali o simili, quindi o sono coincidenti, o sono una l'ingrandimento dell'altra.
Se **a > b** l'ellisse standard **ha i fuochi sull'asse x**, come nella prima figura a sinistra.
Ma se **a < b** l'ellisse standard **ha i fuochi sull'asse y**, come nella seconda figura.
In altre parole il denominatore di x^2 corrisponde comunque al quadrato del semiasse **orizzontale**, mentre il denominatore di y^2 corrisponde al quadrato del semiasse **verticale**.
Si tenga infine presente che se si scrive l'equazione dell'ellisse nella forma y = f(x), è necessario estrarre una radice quadrata che dà luogo al doppio segno ± (come nel caso della circonferenza), e quindi a due equazioni: una corrisponde alla metà superiore dell'ellisse e l'altra alla metà inferiore.

L'ellisse traslata

Con le stesse identiche considerazioni già viste per la parabola, l'equazione dell'ellisse traslata sarà del tipo
(11)

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 & (\text{se} \quad a>b) \\ \dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1 & (\text{se} \quad a<b) \end{cases}}$$

in cui il punto (h;k) è il nuovo centro dell'ellisse.

ESEMPIO 32

Sia data l'ellisse

$$16x^2+9y^2-64x-54y+1=0$$

Cerchiamo di trasformarla in una forma analoga alle (11):

$$16x^2-64x+9y^2-54y=-1$$

$$16\left(x^2-4x\right)+9\left(y^2-6y\right)=-1$$

Ora cerchiamo di completare le espressioni dentro parentesi in modo che diventino dei quadrati perfetti. Per ottenere questo risultato basterà aggiungere e sottrarre 64 e 81.

$$16\left(x^2-4x+4\right)+9\left(y^2-6y+9\right)-64-81=-1$$

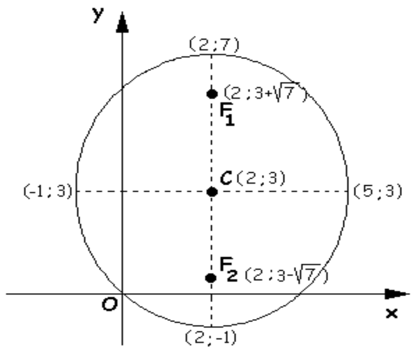
$$16\left(x^2-4x+4\right)+9\left(y^2-6y+9\right)=-1+64+81$$

$$16\left(x-2\right)^2+9\left(y-3\right)^2=144$$

$$\frac{16\left(x-2\right)^2}{144}+\frac{9\left(y-3\right)^2}{144}=1$$

$$\frac{\left(x-2\right)^2}{9}+\frac{\left(y-3\right)^2}{16}=1$$

che è una ellisse con centro nel punto $C\equiv\left(2;3\right)$ e semiassi a = 3 e b = 4 (quindi, essendo a<b, i fuochi sono su una retta parallela all'asse y).



La distanza focale si può calcolare con la (9)

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=16-9=7 \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{7}$$

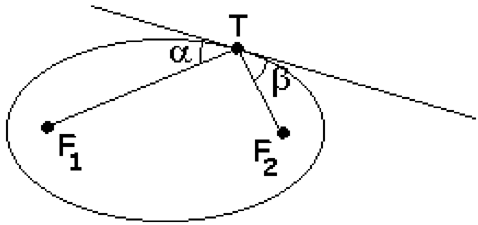
L'eccentricità dell'ellisse è

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}\cong 0,661437827$$

Una importante proprietà

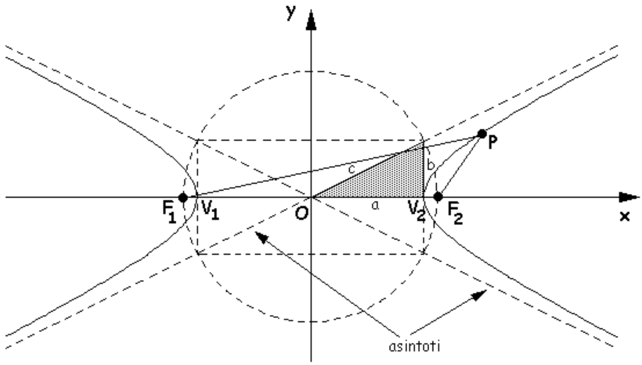
Data una ellisse ed una qualsiasi retta tangente ad essa nel punto T, i due angoli α e b (vedi figura), risultano sempre uguali fra loro.

Quindi, per esempio, se l'interno dell'ellisse è costituito da una superficie riflettente, un raggio luminoso uscente da un fuoco viene riflesso in modo da passare sempre per l'altro fuoco.

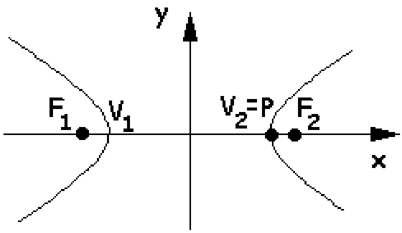


Par. 7 - L'iperbole

Dati due punti F_1 e F_2 (detti **fuochi**), l'iperbole è il luogo di punti (cioè l'insieme di punti) P per i quali la differenza fra le distanze PF_1 e PF_2 è sempre costante.



Il segmento V_1 V_2 si chiama **asse traverso** e si pone uguale a **2a**.
L'asse y (che è anche l'asse del segmento V_1 V_2) si chiama invece **asse non traverso**.
Il segmento F_1 F_2 si chiama **distanza focale** e si pone uguale a **2c**.
E' possibile costruire (vedi figura) una circonferenza con il centro nell'origine e raggio c; quindi dai punti V_1 e V_2 si tracciano due segmenti paralleli all'asse y fino al punto in cui questi intersecano la circonferenza. Si viene a formare un rettangolo con base **2a** ed altezza **2b**.



L'iperbole è formata da due rami separati, uno a destra ed uno a sinistra, che non vanno confusi con due parabole contrapposte: le caratteristiche dell'iperbole sono del tutto diverse da quelle dell'iperbole !

Gli elementi della costruzione tratteggiata non fanno parte dell'iperbole, ma sono utili per capire alcune caratteristiche dell'iperbole stessa.
Intanto la costruzione permette di determinare il **rettangolo caratteristico** dell'iperbole (quello ombreggiato nella figura), simile a quello dell'iperbole ma con la differenza che ora l'ipotenusa è **c** e non **a** come nell'ellisse.
Applicando il teorema di Pitagora si può allora scrivere

(12) $$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Il grado di schiacciamento dell'iperbole è ancora

(13) $$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

che si chiama sempre **eccentricità**, ma a differenza dell'ellisse è un rapporto **sempre maggiore di 1** (perché l'ipotenusa che sta a numeratore è sempre maggiore del cateto che sta a denominatore).
Inoltre le rette che contengono le diagonali del rettangolo, si chiamano **asintoti**, e l'iperbole tende ad avvicinarsi sempre più a tali rette man mano che la x si sposta verso destra o verso sinistra.
Quando il punto P coincide con uno dei due vertici dell'iperbole, la relazione caratteristica dell'iperbole diviene

$$F_1P - PF_2 = F_1P - F_1V_1 = V_1V_2 = 2a$$

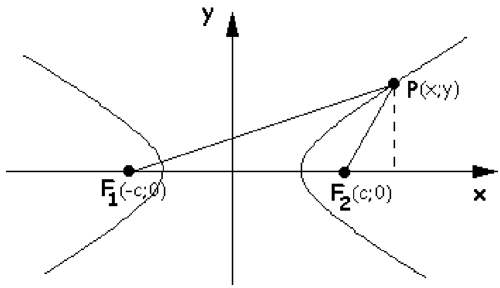
in quanto la distanza fra i due vertici corrisponde alla base del rettangolo (vedi figura a pagina precedente).
Quindi tutti i punti dell'iperbole devono soddisfare la relazione

(14) $$\boxed{\left|PF_1 - PF_2\right| = 2a}$$

La presenza del modulo è dovuta al fatto che

- Per il ramo di destra $PF_1 > PF_2$ e la differenza $PF_1 - PF_2$ è positiva.

- Per il ramo di sinistra $PF_1 < PF_2$ e la differenza $PF_1 - PF_2$ è negativa.



Per ricavare l'equazione dell'iperbole si segue lo stesso identico procedimento già usato per l'ellisse.

Osservando la figura a fianco, applicando la (14), avremo

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

che, a causa del modulo equivale alle due equazioni

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Isolando un radicale nel primo membro, quadrando, sviluppando, semplificando si perviene in entrambi i casi all'equazione finale

(15) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Che è l'equazione dell'**iperbole standard**.

Gli asintoti, osservando che contengono le diagonali del rettangolo che è servito per tracciare l'iperbole, corrispondono a rette passanti per l'origine e con coefficiente angolare pari a $\pm\frac{b}{a}$.

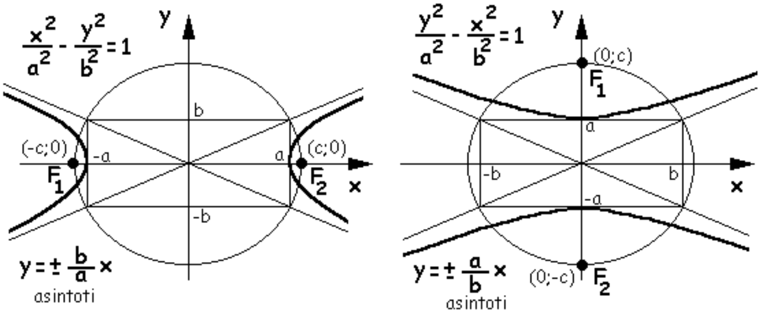
Quindi la loro equazione è

(16) $$\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x}$$

A differenza di quanto avveniva per l'ellisse, i fuochi della (15) si trovano sempre sull'asse x indipendentemente dai valori di **a** e **b**.
Si tenga infine presente che se si scrive l'equazione dell'iperbole nella forma y = f(x), è necessario estrarre una radice quadrata che dà luogo al doppio segno ± (come nei casi della circonferenza e dell'ellisse), e quindi a due equazioni: una corrisponde alla metà superiore dell'iperbole e l'altra alla metà inferiore.
Si ha una iperbole con i fuochi sull'asse y nel caso in cui si abbia

(17) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Ecco a confronto le due equazioni standard dell'iperbole, con i fuochi sull'asse x e sull'asse y, e le equazioni dei relativi asintoti.



Una iperbole si dice **equilatera**, se il rettangolo diviene un quadrato, di conseguenza gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti, **a** = **b**, e le equazioni divengono

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \text{ asintoti } y = \pm x \text{ fuochi sull'asse x} \\ y^2 - x^2 = a^2 \text{ asintoti } y = \pm x \text{ fuochi sull'asse y} \end{cases}$$

L'iperbole traslata

Al solito, l'iperbole traslata corrisponde a una espressione del tipo

$$(18) \boxed{\begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{se i fuochi sono su retta orizz.}) \\ \dfrac{(y-h)^2}{a^2} - \dfrac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{se i fuochi sono su retta vert.}) \end{cases}}$$

ESEMPIO 33

Data l'iperbole

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 21 = 0$$

Cerchiamo di trasformarla in una forma analoga alle (18):

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 21$$

Ora cerchiamo di completare le espressioni dentro parentesi in modo che diventino dei quadrati perfetti. Per ottenere questo risultato basterà aggiungere e sottrarre 4 e 16.

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - \left(y^2 - 8y + 16\right) - 4 + 16 = 21$$

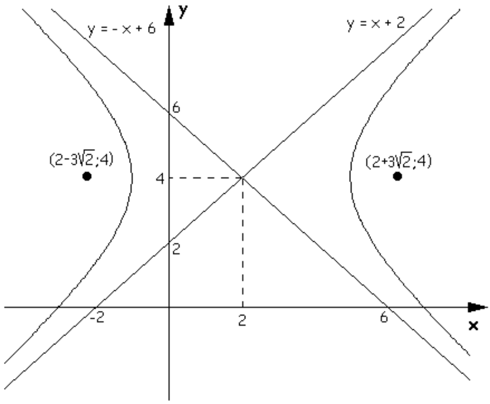
$$(x-2)^2 - (y-4)^2 = 9$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

L'iperbole è quindi equilatera, ha centro nel punto (2;4), i fuochi si trovano su una retta parallela all'asse x, e gli asintoti passano per il punto (2;4) ed hanno coefficienti angolari pari a ± 1.

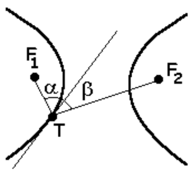
Le equazioni degli asintoti sono quindi

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

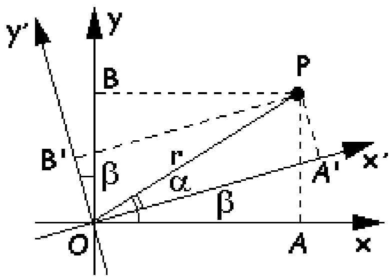


Una importante proprietà

Data una iperbole ed una generica retta tangente ad essa nel punto T, i due angoli α e β sono sempre uguali fra loro.



Par. 8 - Formule di rotazione



Sia dato un punto P con coordinate **OA = x** ed **OB = y**.
La sua distanza dall'origine è **OP = r**.
Consideriamo una seconda coppia di assi coordinati **x'** ed **y'**, ruotati di un angolo **β** rispetto agli assi **x** ed **y**.
Le coordinate del punto P rispetto alla nuova coppia di assi è

OA' = x' e OB' = y'.

Ci proponiamo di trovare una relazione fra le coordinate del punto P nel sistema di riferimento iniziale (che chiameremo **S**), e le coordinate dello stesso punto P nel nuovo riferimento (che chiameremo **S'**).
Nel sistema S' si ha

(1) $$\boxed{\begin{cases} OA' = x' = r \cdot \cos\alpha \\ OB' = y' = r \cdot \mathrm{sen}\alpha \end{cases}}$$

Nel sistema S si ha

(2) $$\boxed{\begin{cases} OA = x = r \cdot \cos(\alpha+\beta) \\ OB = y = r \cdot \mathrm{sen}(\alpha+\beta) \end{cases}}$$

Sviluppiamo le (2) con le formule di addizione

$$\begin{cases} x = r\left(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right) \\ y = r\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\right) \end{cases}$$

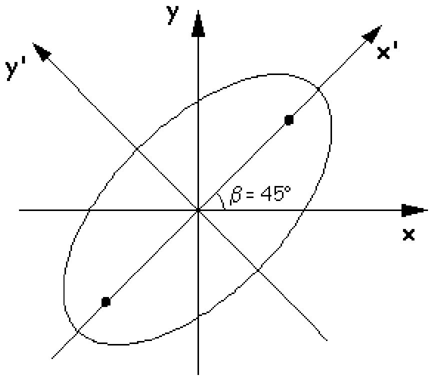
$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\beta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ y = r\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

In quest'ultima espressione, dalla (1), possiamo sostituire $\begin{cases} r\cdot\cos\alpha = x' \\ r\cdot\operatorname{sen}\alpha = y' \end{cases}$ e ottenere

(3) $$\boxed{\begin{cases} x = x'\cdot\cos\beta - y'\cdot\operatorname{sen}\beta \\ y = y'\cdot\cos\beta + x'\cdot\operatorname{sen}\beta \end{cases}}$$

che è la relazione che cercavamo fra le coordinate di un punto P nel sistema S e le coordinate dello stesso punto nel sistema S'.
Applicando la (3) ad una funzione qualsiasi invece che ad un singolo punto, si ottiene l'equazione della funzione rispetto al nuovo sistema di coordinate.
Le **formule inverse** delle (3), esplicitando **x'** ed **y'**, sono

(4) $$\boxed{\begin{cases} x' = x\cdot\cos\beta + y\cdot\operatorname{sen}\beta \\ y' = -x\cdot\operatorname{sen}\beta + y\cdot\cos\beta \end{cases}}$$



ESEMPIO 34

Sia data l'equazione

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

Consideriamo un nuovo sistema di assi coordinati ruotato di 45° in verso antiorario.
Applicando le (3) si ha

$$\beta = 45° \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e, sostituendo, abbiamo

$$5\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-8=0$$

$$5\frac{(x'-y')^2}{2}-6\frac{(x'-y')(x'+y')}{2}+5\frac{(x'+y')^2}{2}-8=0$$

$$5\left(x'^2-2x'y'+y'^2\right)-6\left(x'^2-y'^2\right)+5\left(x'^2+2x'y'+y'^2\right)-16=0$$

$$5x'^2-10x'y'+5y'^2-6x'^2+6y'^2+5x'^2+10x'y'+5y'^2-16=0$$

$$4x'^2+16y'^2-16=0$$

$$x'^2+4y'^2-4=0$$

$$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1$$

che è l'equazione di una ellisse in forma standard rispetto al nuovo sistema S' (vedi figura).
I semiassi sono a = 2 e b = 1. La semidistanza focale è c = $\sqrt{3}$.

Par. 9 - La funzione omografica

Data una iperbole equilatera in forma standard, per esempio:

$$x^2-y^2=a^2$$

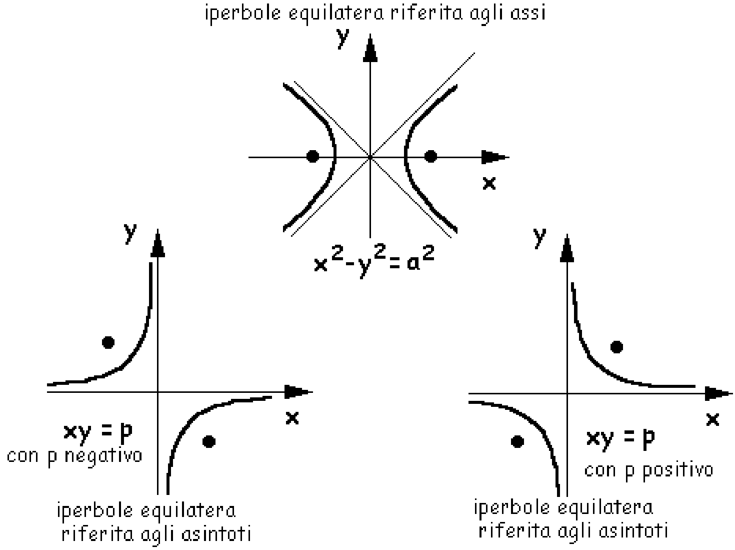
con le formule di rotazione possiamo effettuare una sua rotazione di 45° in verso orario o antiorario (ponendo $\beta = \pm 45°$).
Con calcoli identici a quelli adoperati nell'esempio precedente, si ottengono due semplici equazioni:

$$\begin{cases} x'y' = -\dfrac{a^2}{2} \quad \text{cioè} \quad x'y' = p \quad \text{(con p negativo, se } \beta = 45°) \\ x'y' = \dfrac{a^2}{2} \quad \text{cioè} \quad x'y' = p \quad \text{(con p positivo, se } \beta = -45°) \end{cases}$$

Tralasciando gli apici (che sono serviti solo per non fare confusione durante la trasformazione), possiamo affermare quindi che una equazione del tipo

(5) $$\boxed{xy = p}$$

corrisponde sempre ad una iperbole equilatera che si dice **riferita agli asintoti** perché i suoi assi coordinati coincidono con i suoi asintoti (in contrapposizione a questa, l'iperbole standard dalla quale siamo partiti si dice invece **riferita agli assi**).



Prendiamo ora in considerazione una iperbole equilatera riferita agli asintoti (per eseùmpio quella con p positivo), ed

applichiamo una generica traslazione che sposti l'origine O nel punto P (h;k).
Si ha

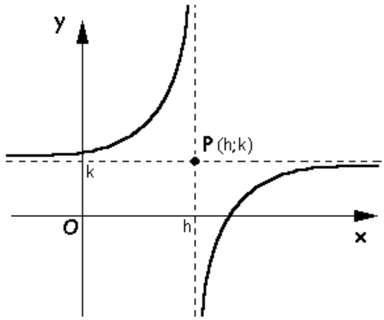
$$(x-h)(y-k)=p$$

$$xy-kx-hy+hk=p$$

cioè

$$y(x-h)=kx+p-hk$$

$$y=\frac{kx+p-hk}{x-h}$$



nel secondo membro, sostituendo i valori numerici ad **h**, **k**, **p** si ottiene il rapporto fra due polinomi di primo grado.
In altre parole ogni funzione del tipo

(6) $$\boxed{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$$

corrisponde sempre ad una iperbole equilatera riferita agli asintoti e traslata.
Viene chiamata anche **funzione omografica**.

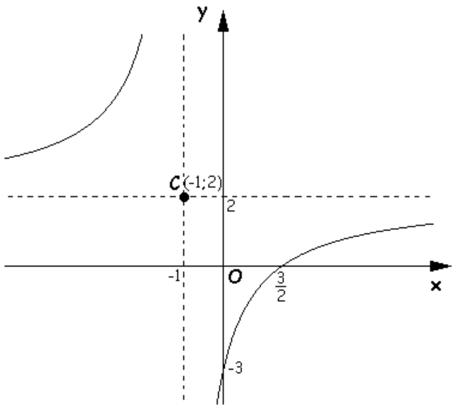
ESEMPIO 35

La funzione

$$y=\frac{2x-3}{x+1}$$

è una funzione omografica.
Per determinare l'**asintoto verticale** basta osservare che il denominatore si annulla per x = -1
e quindi per tale valore la y assume valore infinito.
Per l'**asintoto orizzontale** invece, basta fare questa considerazione: man mano che la x assume valori sempre più

grandi, i termini noti (-3 e +1) forniscono un contributo sempre più trascurabile nella determinazione della y.
Quindi per valori della x sufficientemente grandi questi termini possono essere trascurati e si ha $y = \frac{2x}{x} = 2$.



All'aumentare della x la funzione ha ordinate che si avvicinano sempre più a 2, e perciò l'asintoto orizzontale è dato semplicemente dal rapporto dei coefficienti della x.
In altre parole, riferendoci alla (6) gli asintoti hanno equazioni

(7) $$\boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{d}{c} \\ y = \dfrac{a}{c} \end{cases}}$$

Per stabilire quali siano i quadranti in cui disegnare la funzione, si possono determinare due suoi punti calcolando le intersezioni con gli assi, cioè ponendo uguali a zero la x e la y.

Par. 10 - Le coniche generiche

Una generica equazione di secondo grado in due incognite è formata da un termine in $\mathbf{x^2}$, un termine in $\mathbf{y^2}$, un termine in **xy** (detto **termine misto**), un termine in **x**, un termine in **y**, ed infine un **termine noto**.

Avrà dunque l'aspetto seguente

(8) $$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

in cui i coefficienti possono anche essere nulli (ma non tutti !).
Ebbene, la (8) **corrisponde sempre ad una conica**, cioè ad una circonferenza, o ad una ellisse, o ad una parabola o ad una iperbole.
In tutte le equazioni viste finora:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ la circonferenza

$y = ax^2 + bx + c$ la parabola con asse verticale

$x = ay^2 + by + c$ la parabola con asse orizzontale

$$\begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \end{cases}$$ l'ellisse con fuochi orizzontali o verticali

$$\begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(y-h)^2}{a^2} - \dfrac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$ l'iperbole con fuochi orizzontali o verticali

sviluppando e semplificando si ottiene sempre una relazione come la (8), ma **priva del termine misto**.
Quando però abbiamo realizzato una rotazione di assi, per esempio con l'iperbole equilatera, siamo pervenuti ad

equazioni come le (5) e (6) in cui è invece presente il termine misto.
La presenza del termine misto rivela infatti una rotazione della conica.
Quando è presente il termine misto si può imporre alla conica una opportuna rotazione in modo da far sparire il termine misto, e trasformarla in una delle forme elencate qui sopra.
Come si realizza questa “opportuna rotazione”?
Partiamo dalla (8) ed imponiamo una generica rotazione utilizzando le (3)

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\beta - y'\cdot\operatorname{sen}\beta \\ y = y'\cdot\cos\beta + x'\cdot\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Sostituendo si ha

$$A\left(x'\cdot\cos\beta - y'\cdot\operatorname{sen}\beta\right)^2 + B\left(x'\cdot\cos\beta - y'\cdot\operatorname{sen}\beta\right)\left(y'\cdot\cos\beta + x'\cdot\operatorname{sen}\beta\right) +$$
$$+C\left(y'\cdot\cos\beta + x'\cdot\operatorname{sen}\beta\right)^2 + D\left(x'\cdot\cos\beta - y'\cdot\operatorname{sen}\beta\right) +$$
$$+E\left(y'\cdot\cos\beta + x'\cdot\operatorname{sen}\beta\right) + F = 0$$

Sviluppando e semplificando si perviene ad una nuova conica ruotata, con incognite **x’** ed **y’**, e nuovi coefficienti A’, B’, C’, D’, E’, F’.
Non ci interessa completare la sostituzione, ma ricavare soltanto il coefficiente B’ del nuovo termine misto **x’y’** per poterlo rendere nullo.
Si ha

$$B' = -2A\operatorname{sen}\beta\cos\beta + B\cos^2\beta - B\operatorname{sen}^2\beta + 2C\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$
$$B' = B\left(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta\right) + 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta\left(C - A\right)$$

Imponiamo che sia B’ = 0

$$B\left(\cos^2\beta-\text{sen}^2\beta\right)+2\text{sen}\beta\cos\beta\left(C-A\right)=0$$

$$B\cos\left(2\beta\right)+\text{sen}\left(2\beta\right)\left(C-A\right)=0$$

$$B\cos\left(2\beta\right)=\text{sen}\left(2\beta\right)\left(A-C\right)$$

$$\frac{\cos\left(2\beta\right)}{\text{sen}\left(2\beta\right)}=\frac{A-C}{B}$$

Quindi la rotazione β che permette di far annullare il termine misto è

(9) $$\boxed{\text{cotang}\left(2\beta\right)=\frac{A-C}{B}}$$

ESEMPIO 36

Sia data la conica

$$153x^2-192xy+97y^2-30x-40y-200=0$$

Applicando la (9) si ottiene

$$\text{cotang}\left(2\beta\right)=\frac{153-97}{-192}=-\frac{56}{192}=-\frac{7}{24}$$

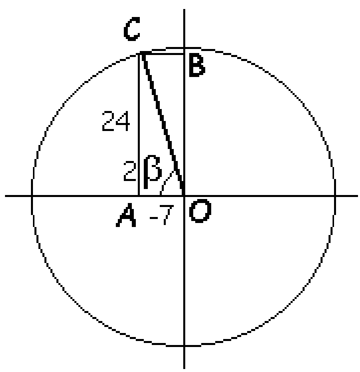
Nella figura a fianco è riportato l'angolo 2β (che si trova nel quarto quadrante perché la tangente è negativa).

Dalla figura si può ricavare immediatamente

$$OC=\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{576+49}=25$$

e quindi

$$\cos\left(2\beta\right)=\frac{OA}{OC}=-\frac{7}{25}$$



Applicando le formule di bisezione si ottiene

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\dfrac{1-\cos(2\beta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{7}{25}}{2}} = \dfrac{4}{5} \\ \cos\beta = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\beta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{7}{25}}{2}} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Ora, utilizzando le formule per la rotazione degli assi

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\beta - y'\cdot\operatorname{sen}\beta \\ y = y'\cdot\cos\beta + x'\cdot\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

avremo

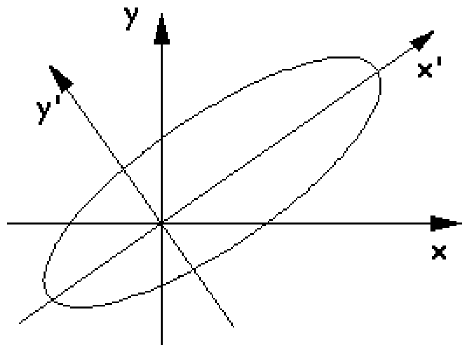
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y'\cdot \\ y = \dfrac{4}{5}y' + \dfrac{3}{5}x' \end{cases}$$

Sostituendo nella conica iniziale, sviluppando e semplificando (con qualche calcolo!), si ottiene

$$x'^2 + 9y'^2 - 2x' - 8 = 0$$

$$\frac{(x'-1)^2}{9} + y'^2 = 1$$

che è una ellisse con centro nel punto (1;0).



Discriminante di una conica

Data l'equazione di una conica generica, è possibile stabilire rapidamente se essa è una ellisse, parabola, iperbole?
Sicuramente si!
Basta applicare la seguente formula che coinvolge i coefficienti della (8), e determinarne il segno.

(9) $$\boxed{\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C}$$

che viene detta **discriminante della conica** ed indicata con Δ (in analogia, ma è solo una analogia, con il discriminante della formula risolutiva di un'equazione di secondo grado).
Si possono verificare i seguenti casi:

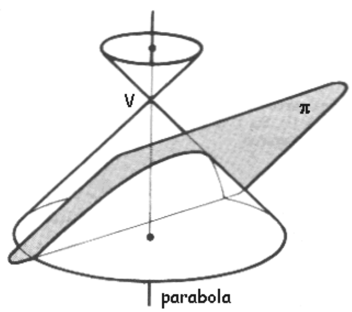
- $\Delta < 0$: la (8) rappresenta una ellisse o una circonferenza (che può essere considerata una ellisse con i fuochi coincidenti).
- $\Delta = 0$: la (8) rappresenta una parabola.
- $\Delta > 0$: la (8) rappresenta una iperbole.

Applicando la formula all'esempio precedente si ha

$$\Delta = (-192)^2 - 4 \cdot 153 \cdot 97 = 36864 - 59364 = -22500$$

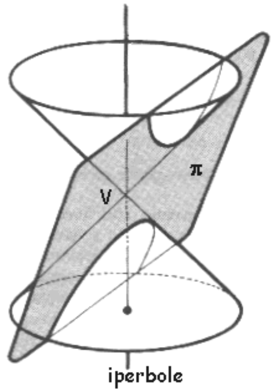
Il discriminante è negativo ed infatti la conica era una ellisse.

Da dove deriva il nome coniche?



Data una retta (che chiameremo **asse della conica**) ed una seconda retta (che chiameremo **retta generatrice**), incidente con la prima, facciamo girare quest'ultima attorno alla precedente.
Si vengono a formare due coni uniti per il vertice, che si

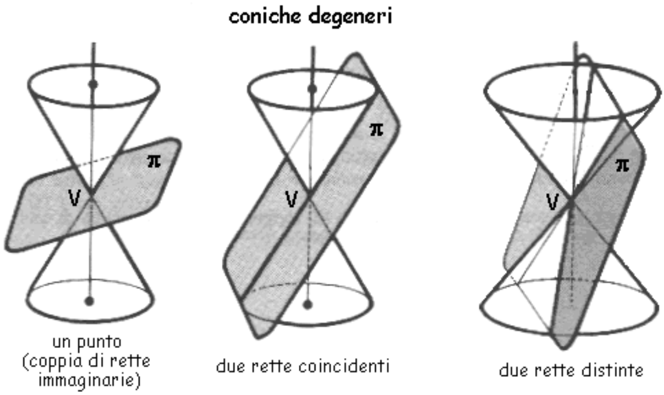
propagano all'infinito in entrambe le direzioni.
Ora tagliamo il cono con **un piano π**: a seconda dell'inclinazione di π rispetto al cono, si formano sul piano stesso delle figure di intersezione che sono appunto circonferenze, ellissi, parabole o iperboli.
Quindi tutte le curve aventi come equazione la (8), derivano dalla intersezione di un cono con un piano, e da qui il loro nome di coniche.



Se il piano π è parallelo alla retta generatrice si ha una parabola, come è mostrato nella figura a fianco.
Se invece il piano π taglia tutte e due le falde del cono (non è necessario che sia parallelo all'asse del cono), si vengono a formare due rami distinti che costituiscono una iperbole (vedi sotto).
Nonostante il piano π non sia parallelo all'asse del cono, i due rami dell'iperbole risultano sempre perfettamente uguali fra loro.

Par. 11 - Le coniche degeneri

Può però accadere che il piano π passi per il vertice.
Si possono presentare tre situazioni diverse: il piano passa solo per il vertice, oppure è tangente ad una generatrice, oppure infine taglia anche le falde del cono.



In ciascuno dei tre casi sul piano π si forma una coppia di rette: due rette con coefficienti immaginari (che messe a sistema corrispondono ad un punto sul piano cartesiano, due rette coincidenti, o due rette distinte.
La coppia di rette viene detta **conica degenere**.
Data la (8) come si fa a riconoscere se la conica è degenere o no?
Si deve considerare la matrice

$$M = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

Se il suo determinante è nullo, allora la conica è degenere.

ESEMPIO 37

$$x^2 + 4y^2 = 0$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi la conica è degenere. Inoltre è $\Delta < 0$ e allora la conica è una **ellisse degenere**.
Determiniamo la coppia di rette.

$$x^2 = -4y^2$$

$$x = \pm 2 \cdot i \cdot y$$

cioè

$$\begin{cases} x = 2 \cdot i \cdot y \\ x = -2 \cdot i \cdot y \end{cases}$$

$$(x - 2iy)(x + 2iy) = 0$$

che sono due rette con coefficienti immaginari, e quindi non possono essere rappresentate nel piano cartesiano, ma che si intersecano in un punto reale (0;0), come si può facilmente constatare sostituendo queste coordinate nell'equazione iniziale.

ESEMPIO 38

$$3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$$

$$M=\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix}=12-\frac{25}{8}-\frac{25}{8}+\frac{25}{2}+\frac{1}{2}-\frac{75}{4}=0$$

La conica è degenere, ed è una iperbole perché $\Delta>0$.
Risolviamola con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado considerando (per esempio) come incognita la x

$$3x^2+x(y-5)-(2y^2-5y+2)=0$$

$$x=\frac{5-y\pm\sqrt{25-10y+y^2+12(2y^2-5y+2)}}{6}=$$

$$=\frac{5-y\pm\sqrt{25y^2-70y+49}}{6}=\frac{5-y\pm(5y-7)}{6}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{5+4y-7}{6}\\[2mm] \dfrac{5-6y+7}{6}\end{cases}$$

Quindi la conica può essere scritta nella forma

$$\left(x-\frac{5+4y-7}{6}\right)\left(x-\frac{5-6y+7}{6}\right)=0$$

$$(3x-2y+1)(x+y-2)=0$$

che è una coppia di rette distinte.

ESEMPIO 39

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$$

$$M = \begin{vmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 36 + 36 + +36 - 36 - 36 - 36 = 0$$

La conica è degenere ed è una parabola perché $\Delta = 0$.
Procediamo come nell'esempio precedente risolvendo rispetto alla x

$$9x^2 - 6x(2y-1) + \left(4y^2 - 4y + 1\right) = 0$$

Applicando la formula ridotta si ha

$$x = \frac{6y - 3 \pm \sqrt{36y^2 - 36y + 9 - 9\left(4y^2 - 4y + 1\right)}}{9} = \frac{6y-3}{9} = \frac{2y-1}{3}$$

Si hanno due soluzioni coincidenti, e quindi la conica corrisponde a

$$\left(x - \frac{2y-1}{3}\right)\left(x - \frac{2y-1}{3}\right) = 0$$

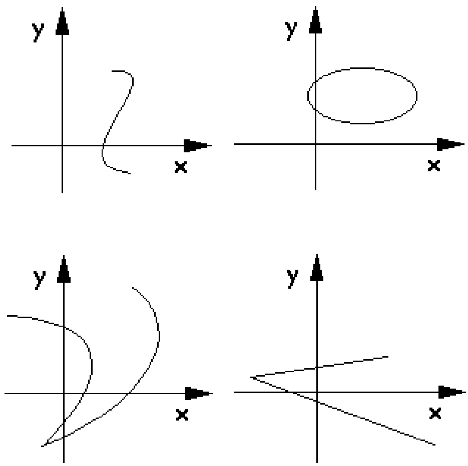
$$(3x - 2y + 1)^2 = 0$$

che è una coppia di rette coincidenti.

CAP. 6 - I LIMITI

Par. 1 - Premesse

Quando si esegue un grafico su un calcolatore occorre tenere sempre presente la differenza fra i concetti teorici della matematica che adoperiamo e la visualizzazione del grafico sullo schermo: questo costituisce infatti una matrice di pixel (puntini luminosi) formata da un numero limitato (anche se molto grande) di punti, fondamentalmente diversa da una porzione di piano costituita da **infiniti punti infinitamente fitti**. In altre parole le coordinate dei punti rappresentati sullo schermo costituiscono un **sottoinsieme limitato e discreto di numeri razionali**.



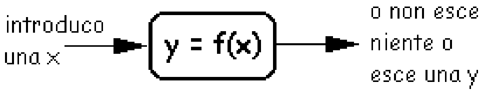
E' per questa ragione che spesso i grafici vengono rappresentati da un calcolatore come linee zigzaganti o comunque imprecise.

E' anche il caso di notare che il calcolatore non può conoscere e trattare il concetto di **infinito** se non come **numero più grande del massimo numero che è capace di elaborare**.

Prendiamo ora in considerazione una funzione **in forma esplicita**

(1) $$\boxed{y = f(x)}$$

Questa deve sempre soddisfare il **TEST DELLA LINEA VERTICALE**: una linea verticale deve tagliare la curva **al massimo** in un punto.
Per esempio, nessuna delle funzioni disegnate a fianco può essere scritta sotto la forma $y = f(x)$.
Una funzione del tipo (1) può essere considerata come una "scatoletta calcolatrice": introducendo un valore arbitrario per la variabile x, dalla scatoletta esce come risultato un valore per la variabile y.



Può accadere che non esca alcun risultato (perché la y è infinita o complessa), ma non possono uscire due o più valori di y per uno stesso valore di x.
La variabile **x** viene anche detta ***variabile indipendente***, mentre la **y** viene detta ***variabile dipendente***.
L'insieme dei valori della x la cui ordinata è reale e finita (cioè l'insieme dei valori della x che forniscono una y in uscita dalla "scatoletta"), prende il nome di DOMINIO o INSIEME DI ESISTENZA della funzione.

ESEMPIO 40

(2) $$y = \frac{2x-3}{x+1}$$

Il dominio è costituito da ogni valore reale della x, eccetto x = -1 perché per tale valore la y è infinita. Esso è perciò

$$-\infty < x < \infty \qquad (x \neq -1)$$

ESEMPIO 41

(3) $$y = \tan x$$

Il dominio è

$$-\infty < x < \infty \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

ESEMPIO 42

(4) $$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Il dominio è $-1 \leq x \leq 1$
perché per valori esterni all'intervallo la y è immaginaria. Gli estremi dell'intervallo appartengono al domino.

ESEMPIO 43

(5) $$y = \ln(1 - x^2)$$

Il dominio è $-1<x<1$
e i valori estremi dell'intervallo sono ora esclusi (perché forniscono valore infinito per la y).

ESEMPIO 44

(6) $$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

Si noti che il numeratore può essere fattorizzato, e la funzione può essere semplificata nel modo seguente

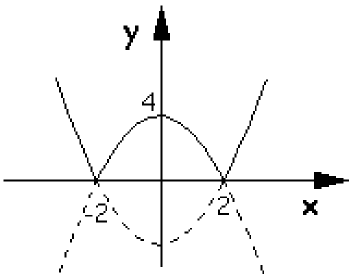
$$y = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$$

La (6) non è quindi altro che una retta, ma attenzione, la "scatoletta" cui ho accennato all'inizio è costituita dalla (6) e non dalla retta, e nella (6) ponendo x = 2 si ottiene come risultato $y = \frac{0}{0}$ cioè risultato indeterminato.

In altre parole per x = 2 non è definita una corrispondente ordinata. Il grafico della (6) è dunque una retta, ma mancante di un punto: il punto con ascissa x = 2 (e ordinata y = -1).
Possiamo dunque affermare che la (6) è una "**retta bucata**".

ESEMPIO 45

(7) $$y = \left|x^2 - 4\right|$$

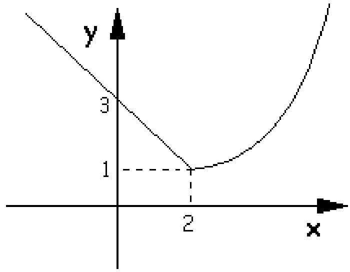


Il dominio è costituito da ogni valore reale della x.
Per effetto del modulo esistono due parabole (tratteggiate), ma poiché ad ogni valore della x corrisponde una sola ordinata, all'interno dell'intervallo (-2; 2) deve essere graficato solo il ramo di parabola con concavità verso il basso (a tratto pieno), mentre esternamente all'intervallo deve essere graficato solo il ramo di parabola con concavità verso l'alto (a tratto pieno).
Anche in questo caso é perciò soddisfatto il test della retta verticale.

Funzioni a tratti

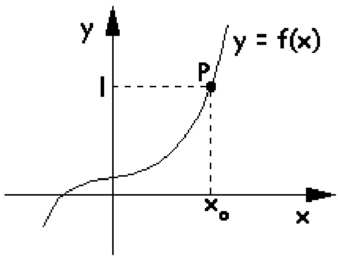
Le funzioni possono essere definite anche **A TRATTI**, con un insieme di due o più relazioni, come nell'esempio seguente

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & (x \le 2) \\ x^2 - 4x + 5 & (x>2) \end{cases}$$



Par. 2 - Il concetto di limite

Consideriamo una funzione y = f(x) ed un suo punto generico P



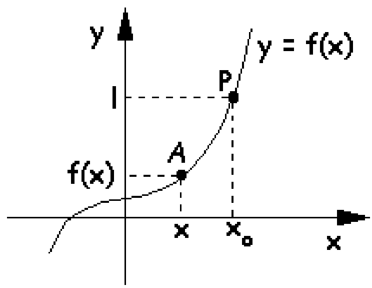
Si possono fare due affermazioni:

1. il punto P con coordinate (x_0;l) appartiene alla funzione.
2. il limite di f(x) per x che tende ad x_0 è l. In simboli quest'ultima affermazione si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

Queste due affermazioni sono fondamentalmente diverse. Vediamo di chiarirne le differenze.

PRIMA DIFFERENZA



Nel primo caso il punto P può anche essere **un punto isolato**, cioè in un opportuno intorno sufficientemente piccolo di P non ci sono altri punti della funzione oltre P.
Nel secondo caso invece, prendendo un secondo punto A della curva, con coordinate $\left(x;f(x)\right)$ e avvicinandolo sempre più a P (da destra o da sinistra, indifferentemente), mentre l'ascissa x si avvicina sempre più a $\mathbf{x_0}$ l'ordinata y si avvicina sempre più ad **l**.
In un intorno piccolo quanto si vuole di P ci sono sempre altri infiniti punti della funzione oltre P.

SECONDA DIFFERENZA = Mentre nel primo caso il punto P appartiene sempre alla funzione, nel secondo caso può avvenire che man mano che A si avvicina a P **tutti i punti A appartengono alla funzione, ma il punto estremo P è l'unico ad essere escluso e a non appartenere alla funzione**.

TERZA DIFFERENZA = Non è detto che il risultato **l** del limite si ottenga sostituendo semplicemente $\mathbf{x_0}$ al posto della x nella funzione f(x).
Cioè non è detto che si abbia in ogni caso

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Questo concetto risulterà più chiaro dopo alcuni esempi nelle pagine seguenti.

Come si calcola un limite?

La prima cosa da fare in presenza di un limite è quella di provare a sostituire x_0 al posto della x: se si ottiene un risultato **l**, allora quello è il risultato del limite.

Per esempio: $$\lim_{x\to 3}(x^2-4x+5)=2$$

oppure $$\lim_{x\to\infty}(x^2-4x+5)=\infty$$

Si noti che in un polinomio, se x tende ad infinito, si può prendere in considerazione solo il termine di grado più elevato e trascurare tutti gli altri (gli altri termini hanno un “peso sempre più trascurabile” rispetto a quello di grado massimo).

Così, per esempio:

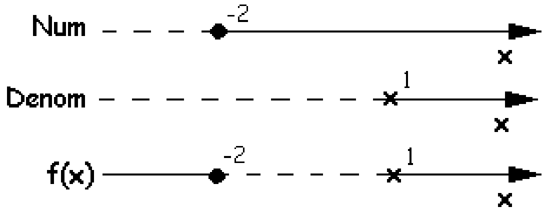
$\lim_{x\to\infty}(x^3-4x+5)=\infty$ mentre invece

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x+5)=-\infty$

talvolta è necessario distinguere il **limite destro** da quello **sinistro**:

Si abbia infatti la funzione $$y=\frac{x+2}{x-1}$$

Studiandone il segno si ottiene



Quando x tende ad 1 la y è infinita sia da destra che da sinistra, ma più precisamente per

$x\to 1^+$ si ha $y=\infty$

$x\to 1^-$ si ha $y=-\infty$

Del resto basta pensare al grafico della funzione, che è una banale funzione omografica.
E' opportuno notare che i risultati ora ottenuti per il limite destro e sinistro, si possono applicare al calcolo di due limiti più complessi

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}} = e^{\infty} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x+2}{x-1}} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \end{array}}$$

Infatti, come vedremo fra poco nei teoremi sui limiti, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ allora $\lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^1$.

Par. 3 - Le forme indeterminate

La prima novità importante legata al concetto di limite si incontra quando si deve calcolare un limite costituito dal rapporto fra due espressioni che tendono entrambe a zero o entrambe ad infinito.

I rapporti $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$ sono espressioni inaccettabili come risultati.

Basta osservare che potremmo scrivere $\dfrac{0}{0} = n$ (con n arbitrario), infatti eseguendo la verifica e moltiplicando n per il denominatore si riottiene in ogni caso il numeratore. Lo stesso ragionamento si può fare anche con $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dunque queste due espressioni rappresentano dei "non risultati", delle situazioni di indecidibilità, e vengono denominate **FORME INDETERMINATE**.

Ma questo non significa che non esista un risultato ben definito.

Per esempio

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0}$$

e 0/0 è una **forma indeterminata**.

L'indeterminazione in questo caso può essere eliminata semplicemente fattorizzando e semplificando numeratore e denominatore:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x-1} = \frac{5}{2}$$

In quest'altro caso invece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 4x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Per togliere l'indeterminazione basta considerare sia a numeratore che a denominatore solo il termine di grado più elevato, ignorando i termini di grado inferiore (che hanno un "peso trascurabile") e si ottiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

In generale, quando si ha il limite di un rapporto fra due polinomi con x tendente ad infinito, per togliere l'indeterminazione basta conservare per ciascun polinomio solo il termine di "maggior peso", cioè di grado più elevato.

Si possono distinguere **tre situazioni differenti**:

1. Numeratore e denominatore sono dello stesso grado e tendono a zero con la stessa "rapidità" (si dice allora che i due infinitesimi sono dello stesso ordine). In questo

caso il risultato del limite è **un numero finito**: occorre soltanto eliminare la causa dell'indeterminazione, come abbiamo visto nell'ultimo esempio precedente.

2. Il numeratore è un polinomio di grado inferiore al denominatore. L'infinito a denominatore è "più potente" di quello a numeratore, nel senso che "arriva a zero più rapidamente" del numeratore: e allora il risultato è **zero**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x+1}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\infty}=0$$

1. Il numeratore è un polinomio di grado superiore al denominatore. L'infinito a numeratore è "più potente" di quello a denominatore, caso contrario del precedente, e allora il risultato è **infinito**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(4x)=\infty$$

Non sempre però è così facile togliere l'indeterminazione e determinare il risultato del limite.

Occorre anche precisare che le espressioni $\boxed{\frac{0}{0} \quad e \quad \frac{\infty}{\infty}}$ **non sono le uniche forme indeterminate. Lo sono anche le espressioni**

$$\boxed{0\cdot\infty \qquad \infty-\infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty}$$

Si può dimostrare (anche se in questa "trattazione rapida ed intuitiva" non lo faremo) che tutte le forme indeterminate possono ridursi alla forma fondamentale 0/0.

Par. 4 - Teoremi sui limiti (senza dimostrazione)

1° Teorema

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = C$ (con C costante)

allora $\lim_{x \to x_0} Kf(x) = KC$

2° Teorema

Se $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = B \end{cases}$

allora $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B$

Inoltre

3° Teorema $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B$

4° Teorema $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

5° Teorema $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$

6° Teorema $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$

7° Teorema $\lim_{x \to x_0} n^{f(x)} = n^A$

8° Teorema $\lim_{x \to x_0} \log_n f(x) = \log_n A$

9° Teorema $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} A$

E così via ...

Par. 5 - Limiti notevoli (senza dimostrazione)

(8) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=1}$$

(9) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1}$$

(10) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}=\frac{a}{b}}$$

(11) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2,71...=e}$$

(12) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x=e^n}$$

(13) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\log_a e}$$

se $a=e$ $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

(14) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

se $a=e$ $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

(15) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n}$$

Infine un criterio che si può applicare quando si ha un termine irrazionale:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\,\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

Par. 6 - Confronto fra infinitesimi

Si dice che una funzione $y = f(x)$ è un infinitesimo per x che tende a x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ (dove x_0 può anche essere infinito).

In precedenza abbiamo affermato che il rapporto fra due infinitesimi dà luogo ad una **forma indeterminata** o **di indecisione**. Questa non può essere accettata come risultato, e tale risultato **deve in ogni caso essere nullo, finito o infinito**.

Però finora abbiamo preso in considerazione solo rapporti fra due polinomi. Come ci si comporta negli altri casi?

Vale ancora il criterio precedente secondo cui il risultato deve essere generalmente nullo, finito o infinito, solo che talvolta è un po' più difficile stabilire quale sia il risultato giusto.

Facciamo alcuni esempi e poi forniamo una breve tabella con i casi più comuni.

PRIMO CASO

Si possono sfruttare i limiti notevoli elencati precedentemente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Poiché il risultato è **un numero finito** i due infinitesimi si dicono **dello stesso ordine**.

Se poi il risultato è 1 (come nel caso di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$) allora si dicono **equivalenti**.

SECONDO CASO

Oppure si possono confrontare fra loro i grafici delle due funzioni.

Date infatti le due funzioni $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} \\ g(x) = \frac{1}{e^x} \end{cases}$

infinitesime per x che tende ad infinito, confrontiamo fra loro i grafici della funzione logaritmo e della funzione esponenziale: all'aumentare della x la seconda cresce molto più rapidamente ed è **un infinito di ordine superiore** rispetto alla prima. Poiché però dobbiamo confrontare fra loro le funzioni reciproche, la g(x) va a zero più rapidamente e quindi è **un infinitesimo di ordine superiore** rispetto alla f(x).

Qualitativamente possiamo dire che la g(x) "arriva a zero prima della f(x)", e allora si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \infty$$

TERZO CASO

Al contrario avremo che $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$

il numeratore è un infinitesimo **di ordine inferiore** rispetto al denominatore.

QUARTO CASO

Può infine verificarsi anche un'altra situazione: che il limite non esista.

Nel rapporto fra due infinitesimi generici (e quindi non entrambi algebrici razionali), può verificarsi che i due infinitesimi **non siano confrontabili**. Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \text{impossibile}$$

Infatti il numeratore è un limite che **non esiste** (e questa situazione non va confusa con le forme indeterminate !).

N.B. Vale la pena di notare che la somma algebrica di infinitesimi e il prodotto di infinitesimi costituiscono ancora un infinitesimo.

Così, per esempio $1/x$ e $\operatorname{sen}(1/x)$ (per x che tende a infinito) sono due infinitesimi. Ebbene, il prodotto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0\cdot 0 = 0$$

è ancora un infinitesimo.

Per concludere, prendiamo in esame alcuni **infinitesimi (fra i più comuni),**

$$\boxed{x \quad \operatorname{sen}x \quad \tan x \quad \operatorname{arcsen}x \quad \arctan x \quad \ln(1+x) \quad e^x - 1}$$

e confrontiamoli fra loro.

Per **x che tende a zero** essi sono **equivalenti** (cioè il loro rapporto è uguale a 1)

$\frac{x^2}{2}$	e	$1-\cos x$
n^x-1	e	$x \cdot \ln n \quad (\text{con } n > 0)$
Kx	e	$(1+x)^K + 1$
$\frac{x}{n}$	e	$\sqrt[n]{1+x} - 1$

Par. 7 - Funzioni continue

Una funzione y = f(x) si dice **continua nel punto con ascissa $\mathbf{x_0}$** se

(16) $$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

cioè se il limite si ottiene semplicemente sostituendo x_0 nella funzione. Il punto con ascissa x_0 può anche non appartenere alla funzione.

In quali casi la (16) non è verificata? Lo vedremo con qualche esempio.

Una funzione si dice invece **continua in un intervallo**, se è continua in **tutti** i punti di tale intervallo.

Per esempio, sono continue:

- Tutte le funzioni algebriche razionali intere (cioè i polinomi)
- Tutti i rapporti fra due polinomi (eccetto i **POLI**, cioè gli eventuali ZERI del polinomio a denominatore).
- La funzione esponenziale $\mathbf{y = K\, a^x}$
- La funzione logaritmica $\mathbf{y = K \log_a x}$ (per x > 0)
- Le funzioni **y = sen x** e **y = cos x**

- Le altre funzioni trigonometriche, eccetto i punti in cui esse hanno asintoti verticali.

E così via…
Sono inoltre continue tutte le **combinazioni lineari** di funzioni continue.
Cioè se f(x) e g(x) sono continue, lo è anche la funzione

$$\mathbf{y = a\, f(x) + b\, g(x)}$$

Sono infine continue le **funzioni composte** (dette anche **funzioni di funzione**), le cui funzioni componenti siano continue.
Cioè, per esempio, le funzioni

$$\begin{cases} y = f(t) = \operatorname{sen} t \\ t = g(x) = 5x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

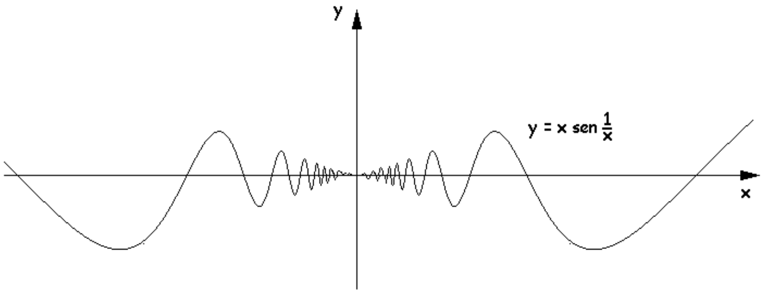
sono continue. E perciò la funzione composta

$$y = f\left[g(x)\right] = \operatorname{sen}\left(5x^2 - 3x + 2\right)$$

è anch'essa continua.
Talvolta, specie nelle funzioni a tratti, occorre fare attenzione: per esempio la funzione

$$\text{(17)} \qquad y = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & (\text{per } x \neq 0) \\ x & (\text{per } x=0) \end{cases}$$

è continua.

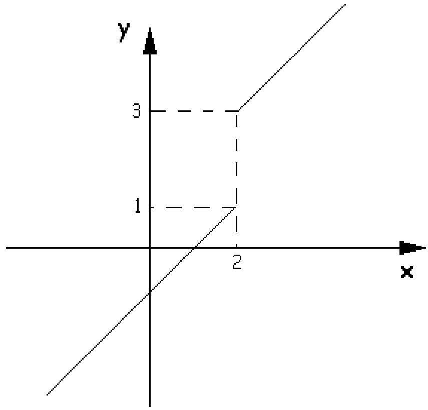


Infatti, vedi grafico a fianco, la prima funzione ammette come limite y = 0 per x che tende a zero, ma il punto di coordinate (0;0) non appartiene alla funzione.
(E' un caso analogo alla retta bucata: tutta la funzione meno un punto singolo).
Con la seconda condizione aggiunta, la (17) diviene continua.
Un criterio pratico per stabilire se la funzione è continua consiste nella possibilità di **tracciare la funzione senza alzare mai la punta scrivente dal foglio**.
Nell'esempio precedente, se non ci fosse stata la condizione aggiunta, l'esistenza del "buco" ci avrebbe costretto ad interrompere il tracciamento della curva alzando per un istante la penna dal foglio.

Par. 8 - Le discontinuità

E' possibile elencare tre diversi tipi di discontinuità, caratterizzati dalle considerazioni seguenti:

PRIMA SPECIE



Una funzione y = f(x) è discontinua nel punto x_0 **se i due limiti destro e sinistro sono entrambi finiti e diversi fra loro**.

Cioè se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = b$$

ed a e b sono finiti ma differenti.

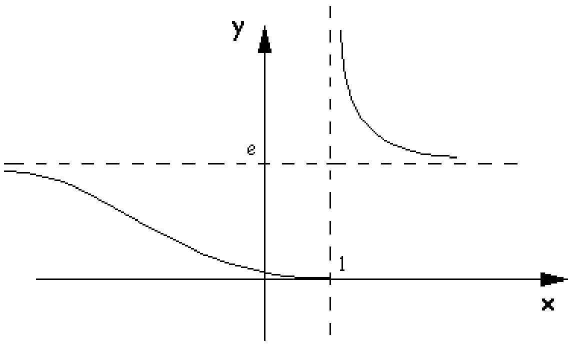
Per esempio:

$$y = x + \frac{|x-2|}{x-2}$$

Per x che tende a 2 c'è una discontinuità del prima specie perché il limite destro e sinistro sono rispettivamente 3 ed 1.

SECONDA SPECIE

Una funzione y = f(x) è discontinua nel punto x_0 se almeno uno dei due limiti destro e sinistro è infinito o non esiste.



Per esempio, la funzione y = sen(1/x) è discontinua per x che tende a zero perché tale limite (come già visto) non esiste.

Anche la funzione

$$y = e^{\frac{x+2}{x-1}}$$

già vista, e che ha il grafico mostrato nella figura qui a fianco, ha un punto di discontinuità di seconda specie per x = 1.

TERZA SPECIE (Eliminabile)

Una funzione y = f(x) è discontinua nel punto x_0 **se il limite non esiste o se non è uguale a f(x_0)**.

Questo tipo di discontinuità si dice anche **eliminabile** perché basta **aggiungere una condizione opportuna** per rendere continua la funzione.

Per esempio, la funzione (17) è discontinua per x che tende a 0 (perché in tale punto la funzione non esiste).

Basta però aggiungere la condizione y = x (per x = 0) per renderla continua.

Lo stesso dicasi per la funzione del quinto esempio del primo paragrafo (la retta bucata). Basta porre

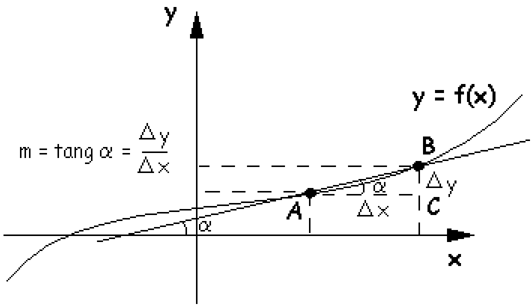
$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & \text{(per } x \neq 2) \\ -1 & \text{(per } x = 2) \end{cases}$$

Oppure la funzione $y = \dfrac{\text{sen}x}{x}$ che è discontinua per x che tende a zero. Infatti il risultato del limite è $y = 1$ che **non si ottiene** sostituendo semplicemente 0 al posto della x !
Del resto il punto (0;1) non appartiene alla funzione!
Anche questa funzione può essere resa continua con la condizione aggiunta

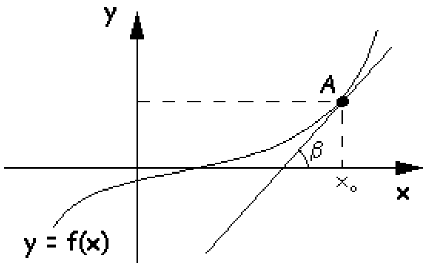
$$y = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}x}{x} & \text{(per } x \neq 0) \\ 1 & \text{(per } x = 0) \end{cases}$$

CAP. 7 - LE DERIVATE

Par. 1 - Dal rapporto incrementale alla derivata



Consideriamo una funzione $y = f(x)$ **continua** (o almeno continua nell'intervallo che ci interessa).
Su questa funzione fissiamo **due punti arbitrari A e B**.
Si forma il triangolo ABC con cateti lunghi rispettivamente **Δx** e **Δy**.
Il rapporto $\Delta y/\Delta x$ prende il nome di rapporto incrementale e corrisponde (vedi figura sopra) al coefficiente angolare della retta secante AB, cioè alla tangente trigonometrica dell'angolo α.
Se ora manteniamo fisso uno dei due punti (per esempio A) e facciamo scorrere B sulla curva avvicinandolo sempre più ad A, **la retta secante ruota attorno al punto A fino a trasformarsi nella retta tangente** (vedi figura seguente).
Il triangolo ABC durante questa trasformazione si è modificato e rimpiccolito fino a degenerare trasformandosi in un punto (il punto A).



I due cateti **Δx** e **Δy** si sono anche loro impiccoliti **fino a diventare due infinitesimi**.
Il triangolo degenerato in un punto non ha più caratteristiche metriche, ed il rapporto incrementale **Δy/Δx** fornisce un risultato indeterminato del tipo 0/0.
Però se consideriamo tale triangolo come punto di arrivo di una operazione di limite, allora il rapporto incrementale diventa il **coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto A**, cioè la **tangente trigonometrica dell'angolo α**.
Questo valore numerico, se esiste ed è finito, prende il nome di derivata della funzione nel punto A.
Quindi la derivata di una funzione in un suo punto è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto.
Se ripetiamo tale ragionamento per ogni punto della funzione facendo scorrere il punto A avanti e indietro, potremo associare ad ogni punto della funzione il valore del coefficiente angolare delle rette tangenti.
In altre parole potremo costruire una nuova funzione da associare alla f(x), formata da tutti i coefficienti angolari delle rette tangenti.
Questa nuova funzione prende il nome di **funzione derivata** (o semplicemente **derivata**) della f(x).

Siamo così passati dal concetto di derivata in un punto (che è un numero) alla derivata in un intervallo (che è una funzione).

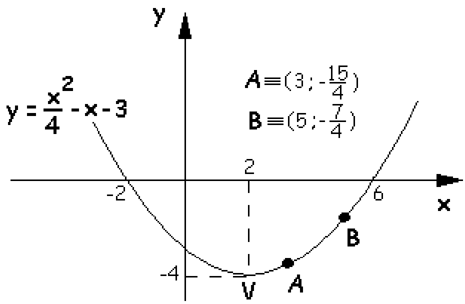
ESEMPIO 46

Prendiamo in considerazione la parabola indicata nella figura a fianco.

Su di essa fissiamo due punti arbitrari

A = (3;-15/4)

B = (2;-4)

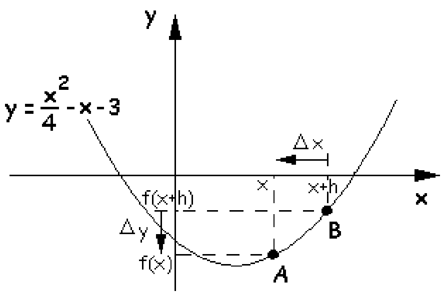


Calcoliamo il coefficiente angolare m della retta secante passante per A e B sostituendo nella formula seguente

(1) $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

le coordinate dei punti A e B.

La (1) è anche il **rapporto incrementale** (perché é il rapporto fra i due incrementi **Δy** e **Δx**).



Facendo i calcoli si trova che il coefficiente angolare della retta secante AB è

$$m_{AB} = \frac{-\frac{7}{4} - (-\frac{15}{4})}{5 - 3} = 1$$

Mantenendo fisso il punto A facciamo ora scorrere il punto B sulla parabola in modo da avvicinarlo gradatamente ad A: la retta secante ruota attorno ad A (vedi figura a pag. 174), i due incrementi Δy e Δx diventano sempre più piccoli, e la retta secante diventa la **retta tangente alla curva nel punto A**. In questa condizione il coefficiente angolare diviene $m_A = 1/2$ e prende il nome di derivata della funzione nel punto A.
La derivata in un punto é quindi un numero (nel nostro caso é $m_A = 1/2$) e può essere ricavato per via grafica tracciando la retta tangente e calcolando poi il suo coefficiente angolare, o attraverso calcoli per via analitica (condizione di tangenza, nei casi in cui ciò è possibile).
Ora invece consideriamo il punto A **variabile** (con ascissa x), e il punto B **anch'esso variabile** con ascissa x+h (dove h è un **incremento** arbitrario positivo o negativo).
I due punti A e B hanno coordinate

$$A \equiv (x; f(x))$$
$$B \equiv (x + \Delta x; f(x + \Delta x))$$

che nel nostro esempio divengono

$$A \equiv (x; \frac{x^2}{4} - x - 3)$$
$$B \equiv (x + \Delta x; \frac{(x + \Delta x)^2}{4} - (x + \Delta x) - 3)$$

Il coefficiente angolare m della retta AB è allora espresso dalla relazione

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\left[\frac{(x+h)^2}{4} - (x+h) - 3\right] - \left[\frac{x^2}{4} - x - 3\right]}{h} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x^2+2hx+h^2}{4} - x - h - 3\right) - \left(\frac{x^2}{4} - x - 3\right)}{h} =$$

$$= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h - 12 - x^2 + 4x + 12}{4h} =$$

$$= \frac{2hx + h^2 - 4h}{4h} = \frac{2x + h - 4}{4}$$

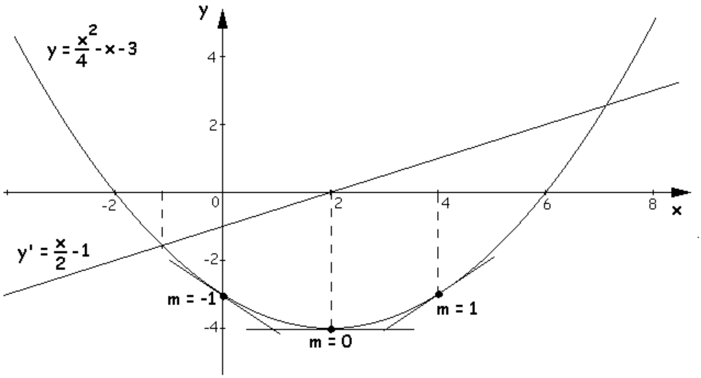
Ora facciamo il limite per h che tende a zero (cioè con B che tende ad A), e si ottiene

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2x + h - 4}{4}\right) = \frac{1}{2}x - 1}$$

La nuova funzione è la **funzione derivata** (o semplicemente **derivata**) della funzione $y = f(x)$ e si indica con i simboli

$$y' = f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{oppure}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - 1$$



L'ultimo simbolo (che si legge "de y su de x") è quello proposto da Leibniz, ed è il più espressivo perché indica proprio il rapporto fra due incrementi che sono diventati entrambi infinitesimi (dy e dx).
Rappresentando su uno stesso grafico la f(x) e la sua derivata f'(x), si ha il grafico della pagina precedente.
Nei tre punti messi in evidenza in figura, si ha rispettivamente:

$$f'(0) = 0 - 1 = -1$$

$$f'(2) = 1 - 1 = 0$$

$$f'(4) = 2 - 1 = 1$$

e la derivata

$$y' = x/2-1$$

per $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ assume rispettivamente le ordinate $y' = -1$, $y' = 0$, $y' = 1$.

Par. 2 - Continuità e derivabilità

Se una funzione $y = f(x)$ è continua in un intervallo, fissando arbitrariamente due punti x_0 e x_0+h in tale intervallo, è possibile costruire il rapporto incrementale $\Delta y/\Delta x$.
Eseguendo il limite del rapporto incrementale per h che tende a zero (o per x che tende a x_0, che è la stessa cosa), si ottiene la derivata della funzione nel punto x_0.
Però tale limite deve essere unico e finito: cioè

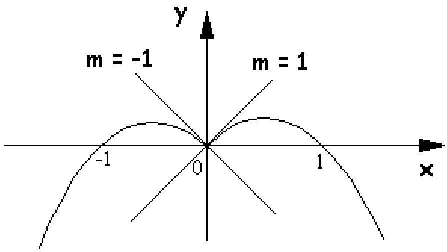
$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m}$$

ESEMPIO 47

La funzione $y = -x^2 + |x|$
che si può anche scrivere

$$y = \begin{cases} -x^2 - x & (\text{per } x \le 0) \\ -x^2 + x & (\text{per } x \ge 0) \end{cases}$$

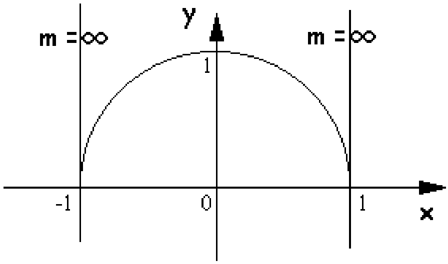
ha come grafico due rami di parabola e nel punto con ascissa $x = 0$ la funzione **pur essendo continua non è derivabile**, perché il limite del rapporto incrementale (cioè il coefficiente angolare della retta tangente) ha due valori diversi a seconda che si arrivi a 0 da destra o da sinistra.



ESEMPIO 48

Invece la funzione

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$



che corrisponde ad una semicirconferenza, nei punti con ascissa x = -1 e x = 1 **pur essendo continua non è derivabile** perché il coefficiente angolare della retta tangente (e quindi la derivata) in tali punti ha valore infinito.
Quindi la condizione di derivabilità è più vincolante di quella di continuità.
In altre parole le funzioni continue non è detto che siano derivabili, mentre le funzioni derivabili sono sempre anche continue.
Possiamo anche dire che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme delle funzioni continue.

Par. 3 - Regole di derivazione

Tavola delle derivate più comuni:

$y = a$	$y' = 0$
$y = ax^n$	$y' = a \cdot nx^{n-1}$
$y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	$y' = \dfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
nel caso particolare che sia $n = 2$ si ha	
$y = \sqrt{x^m}$	$y' = \dfrac{m}{2\sqrt{x^{2-m}}}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \log_n x$	$y' = \dfrac{1}{x} \log_n e = \dfrac{1}{x \cdot \ln n}$
nel caso particolare che sia $n = e$ si ha	
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x = e^{x \ln a}$	$y' = \ln a \cdot e^x$

Inoltre, nel caso di due (o più) funzioni:

$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Par. 4 - Le funzioni composte

Molte funzioni possono essere immaginate come formate da due funzioni una dentro l'altra:

(2) $y = \text{sen } 3x$ che si può scrivere

$$\begin{cases} y = \text{sen} z \\ z = 3x \end{cases}$$

Una funzione di questo tipo si chiama **funzione composta** o **funzione di funzione**.

Altri esempi sono i seguenti

(3) $y = \log(x^2 - 3)$ che si può scrivere

$$\begin{cases} y = \log z \\ z = x^2 - 3 \end{cases}$$

(4) $y = \sqrt{3x + 1}$ che si può scrivere

$$\begin{cases} y = \sqrt{z} \\ z = 3x + 1 \end{cases}$$

Si possono avere anche più di due funzioni una dentro l'altra, a formare una funzione di funzione di funzione:

(5) $y = \cos\sqrt{4x^3 - 2x + 1}$ che si può scrivere

$$\begin{cases} y = \cos z \\ z = \sqrt{t} \\ t = 4x^3 - 2x + 1 \end{cases}$$

Generalizzando possiamo indicare una funzione composta nel modo seguente

(6) $\quad y = f\left[g\left(x\right)\right]$ che si può scrivere

$$\begin{cases} y = f(z) \\ z = g(x) \end{cases}$$

Dove f(z) e g(x) sono le **funzioni componenti** della funzione composta.
Ebbene, la derivata di una funzione composta è il prodotto delle derivate delle singole funzioni componenti.
Negli esempi precedenti si avrà allora

$$y' = (\text{sen}3x)' = (\text{sen}z)'(3x)' = 3\cos z = 3\cos 3x$$

$$y' = \left[\log(x^2-3)\right]' = \frac{1}{x^2-3}(x^2-3)' = \frac{2x}{x^2-3}$$

(stabiliamo per convenzione che se negli esempi il logaritmo non ha base lo consideriamo sempre con base e)

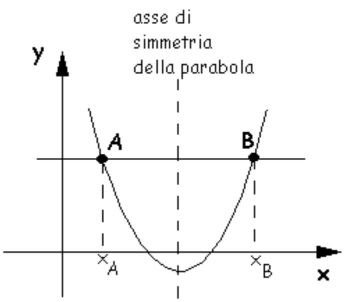
$$y' = \left(\sqrt{3x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}}(3x+1)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$y' = \left(\cos\sqrt{4x^3-2x+1}\right)' = -\text{sen}\sqrt{4x^3-2x+1}\left(\sqrt{4x^3-2x+1}\right)' =$$

$$= -\text{sen}\sqrt{4x^3-2x+1}\,\frac{1}{2\sqrt{4x^3-2x+1}}(4x^3-2x+1)' =$$

$$= \text{sen}\sqrt{4x^3-2x+1}\,\frac{1-6x}{\sqrt{4x^3-2x+1}}$$

Par. 5 - La derivazione delle funzioni inverse



Abbiamo visto che una funzione può essere scritta nella forma **y = f(x)** solo se è rispettata la regola della retta **verticale: una generica retta verticale**

deve tagliare la curva al massimo in un punto.
Ora domandiamoci: è possibile esplicitare la funzione rispetto alla x in modo da scriverla sotto la forma $x = g(x)$? Alcune volte sì, ed altre volte no.
E' possibile se vale anche la regola della retta orizzontale: una generica retta orizzontale deve tagliare la curva al massimo in un punto.
In tal caso la funzione si chiama **bijettiva** e si ha l'abitudine di indicarla con il simbolo $\mathbf{x = f^{-1}(y)}$ invece che con $x = g(x)$.
Si noti però che le due funzioni $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ sono due modi diversi per indicare la stessa funzione.
Eseguiamo ora la trasformazione geometrica consistente nel sostituire fra loro la x con la y, cioè se operiamo una rotazione di 180° attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si ha una nuova funzione $\boxed{y = f^{-1}(x)}$ che viene chiamata **funzione inversa** della f(x).
Chiariamo questo concetto con un semplice esempio.
Data la parabola $\mathbf{y = x^2 - 5x + 6}$
si vede che essa non soddisfa la regola della retta orizzontale perché le intersezioni (vedi figura) sono due.
Ed infatti proviamo ad esplicitare la funzione rispetto alla x (considerando la y come parte del termine noto).
Abbiamo

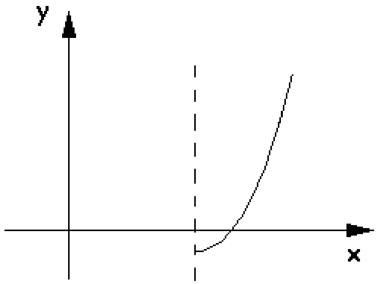
$$x^2 - 5x + 6 - y = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1-4y}}{6}$$

Ebbene, assegnando un valore arbitrario alla y, a causa del doppio segno, si trovano due valori della x che corrispondono alle ascisse dei due punti A e B.
In altre parole si vengono a formare due rami di curva:

una semiparabola di destra associata alla funzione

$$x = \frac{5+\sqrt{1-4y}}{6}$$



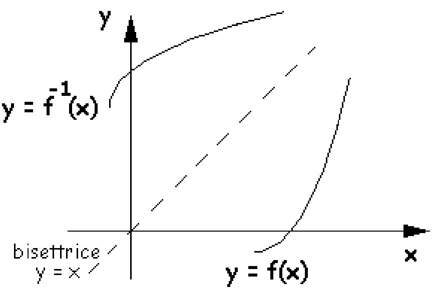
ed una semiparabola di sinistra associata alla funzione

$$x = \frac{5-\sqrt{1-4y}}{6}$$

Ciascuno di questi due rami costituisce una funzione che rispetta la regola della retta orizzontale.
Prendiamo in considerazione solo la semiparabola di destra.
Si noti che la funzione

$$x = \frac{5+\sqrt{1-4y}}{6}$$

non è ancora la funzione inversa, ma è un ramo della parabola iniziale esplicitata rispetto alla x.
Ora **operiamo uno scambio fra le variabili x ed y** (che geometricamente si traduce in una rotazione attorno alla retta y = x).

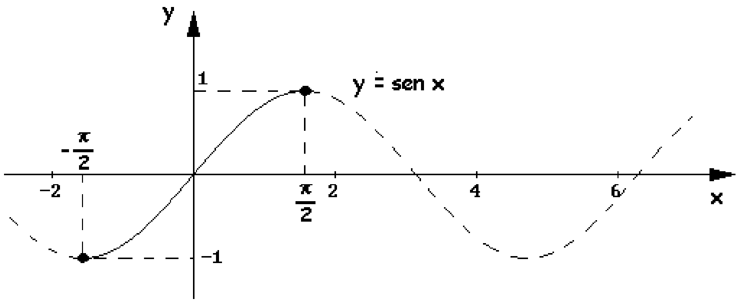


Finalmente si ottiene la funzione

$$\boxed{y = \frac{5+\sqrt{1-4x}}{6} = f^{-1}(x)}$$

che è appunto la funzione inversa della parabola. Però è possibile invertire solo parte della parabola (il ramo destro o quello sinistro).

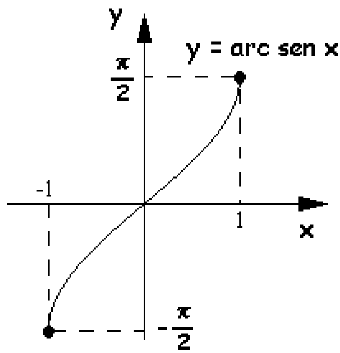
Si può affermare che **una funzione è totalmente invertibile solo se è monotòna**, cioè solo se è sempre crescente o decrescente, altrimenti è invertibile solo nei tratti in cui essa è monotòna.
Allo stesso modo la funzione
y = senx può essere invertita solo nell'intervallo [-π/2; π/2].
Infatti solo in tale intervallo la funzione è monotòna.



La funzione inversa

y = arc sen x

consiste allora nella rotazione attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante dell'arco di sinusoide a tratto pieno (vedi figura sopra).

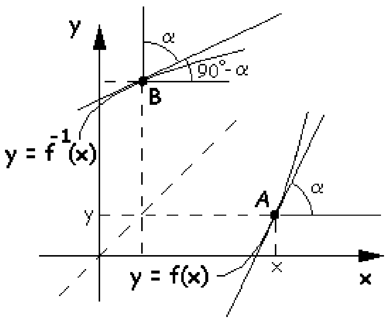


Ecco allora come appare la funzione

y = arc sen x

Dopo queste premesse necessarie per chiarire il concetto di funzione inversa, possiamo occuparci di come si possa derivare una funzione inversa.

Si abbia una generica funzione



$y = f(x)$ e la corrispondente funzione inversa $y = f^{-1}(x)$.
Per comodità di scrittura indichiamo la derivata di $f(x)$ e di $f^{-1}(x)$. rispettivamente con $Df(x)$ e con $D\, f^{-1}(x)$.
Ebbene, la derivata della $f(x)$ nel punto A è

$$\mathbf{D\, f(x) = \tan \alpha}$$

Osserviamo che il rettangolo con vertice A ha base x ed altezza y, mentre il rettangolo con vertice B ha le stesse dimensioni ma con base y ed altezza x.
La derivata della funzione $f^{-1}(x)$. nel punto B la possiamo indicare allora con il simbolo

$$Df^{-1}(y) = \tan\beta = \tan(90-\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{Df(x)}$$

che si può anche scrivere

(7) $$\boxed{Df(x) = \frac{1}{Df^{-1}(y)}}$$

Questa formula ci permette di calcolare la derivata delle funzioni inverse.

ESEMPIO 49

$y = \text{arc sen } x$ che si può anche scrivere $x = \text{sen } y$ (e non è la funzione inversa !)

$$y' = \text{Darcsen}x = \frac{1}{\text{Dsen}y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ESEMPIO 50

$y = \text{arc}\cos x$ che si può anche scrivere $x = \cos y$

$$y' = D\arccos x = \frac{1}{D\cos y} = \frac{1}{-\text{sen}y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ESEMPIO 51

$y = \arctan x$ che si può anche scrivere $x = \tan y$

$$y' = D\arctan x = \frac{1}{D\tan y} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\text{sen}^2 y + \cos^2 y} =$$

$$= \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

ESEMPIO 52

$y = \text{arccotan}\, x$ che si può anche scrivere $x = \text{cotan}\, y$

$$y' = D\text{arcc}\tan x = \frac{1}{D\text{c}\tan y} = -\text{sen}^2 y = \frac{-\text{sen}^2 y}{\text{sen}^2 y + \cos^2 y} =$$

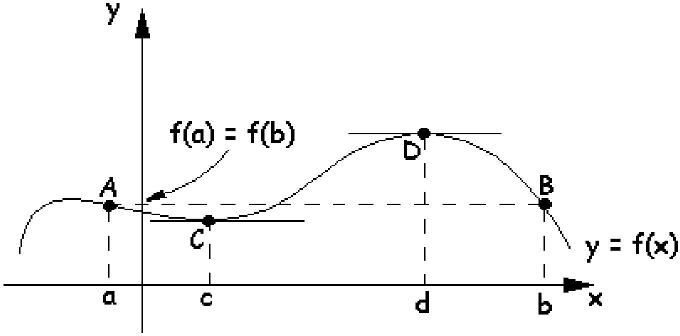
$$= -\frac{1}{\text{c}\tan^2 y + 1} = -\frac{1}{x^2+1}$$

Par. 6 - Il teorema di Rolle

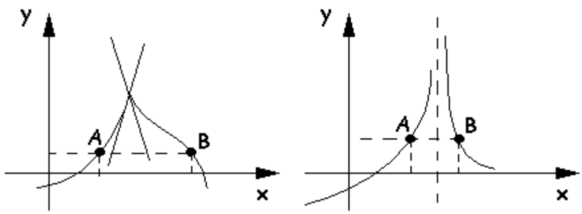
Se **$y = f(x)$** è una funzione **derivabile** in un certo intervallo]**a**;**b**[e almeno **continua nei due estremi**, se agli estremi di tale intervallo la funzione assume la stessa ordinata, cioè se

$$\mathbf{f(a) = f(b)}$$

allora deve esistere almeno un punto c (interno all'intervallo) tale che $f'(c) = 0$.

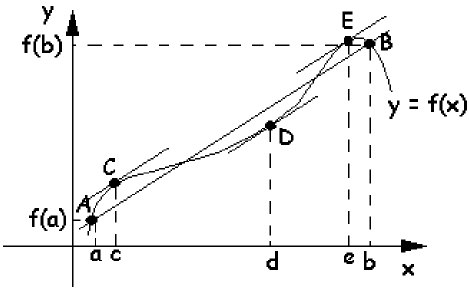


Il teorema è di immediata comprensione intuitiva: deve esistere almeno un punto (nell'esempio precedente ce ne sono due, C e D), in cui la retta tangente è orizzontale (cioè parallela alla retta AB).



La condizione di derivabilità include anche quella di continuità: infatti se la funzione non fosse continua (come nei due esempi a fianco), allora **potrebbe avvenire che in nessun punto interno ad]a;b[la retta tangente fosse orizzontale**.

Par. 7 - Il teorema di Lagrange (o del valor medio)



Se **y = f(x)** è una funzione **derivabile** in un certo intervallo]**a**;**b**[, e almeno continua agli estremi, **allora deve esistere almeno un punto c** (interno all'intervallo) **tale che**

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Osservando che il secondo membro espri-me il coefficiente ango-lare della retta passante per A e B, si capisce come debba esistere almeno un punto C (interno all'intervallo) in cui la retta tangente sia parallela ad AB. Nel nostro esempio c'è anche un secondo punto D con tali caratteristiche.
In altre parole **il teorema di Lagrange si può considerare una generalizzazione del teorema di Rolle**: infatti basta deformare la figura relativa al teorema di Rolle spostando in basso il punto A ed in alto il punto B. per ottenere la figura relativa al teorema di Lagrange.

Par. 8 - Il teorema di Cauchy

Si abbiano due funzioni **y = f(x)** e **y = g(x)** entrambe **derivabili** in un certo intervallo]**a**;**b**[, almeno **continue agli estremi**, e con $g'(x) \neq 0$ in tutto l'intervallo]**a**;**b**[,
Deve esistere almeno un punto c (interno all'intervallo), in cui si abbia

(8)
$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Questo teorema non è visualizzabile efficacemente con un grafico, ma si può facilmente dimostrare ricorrendo al teorema di Rolle.
Costruiamo ora una nuova funzione **y = F(x)** così strutturata:
(9)
$$F(x)=\left[g(b)-g(a)\right]f(x)-\left[f(b)-f(a)\right]g(x)$$

Questa nuova funzione è anch'essa derivabile perché semplice combinazione algebrica di funzioni derivabili. Calcoliamo i valori di questa funzione F(x) agli estremi dell'intervallo]a;b[.

$$\begin{aligned}F(a)&=\left[g(b)-g(a)\right]f(a)-\left[f(b)-f(a)\right]g(a)=\\&=f(a)g(b)-f(a)g(a)-f(b)g(a)+f(a)g(a)=\\&=f(a)g(b)-f(b)g(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(b)&=\left[g(b)-g(a)\right]f(b)-\left[f(b)-f(a)\right]g(b)=\\&=f(b)g(b)-f(b)g(a)-f(b)g(b)+f(a)g(b)=\\&=f(a)g(b)-f(b)g(a)\end{aligned}$$

I due risultati sono uguali, quindi la funzione F(x) soddisfa le premesse del teorema di Rolle. Dunque deve esistere almeno un punto c tale che **F'(c) = 0**.
Derivando la (9) si ha
$$F'(x)=\left[g(b)-g(a)\right]f'(x)-\left[f(b)-f(a)\right]g'(x)=0$$

Da questa, con semplici passaggi, si ricava la (8).

Par. 9 - Il teorema di De l'Hospital

Siano y = f(x) e y = g(x) due funzioni derivabili nell'intervallo che ci interessa e almeno continue in un punto c interno a tale intervallo.

Se il

(10) $$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \qquad (\text{o } \frac{\infty}{\infty})$$ allora

$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Il teorema può essere applicato anche più volte consecutivamente, purchè ogni volta sia soddisfatta la (10).

ESEMPIO 53

Uno dei limiti notevoli si risolve immediatamente applicando il T. di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

ESEMPIO 54

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{5x^2-2x-3}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{5x^2-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4x}{10x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Ci sono però casi (anche se rari) in cui il teorema dell'Hospital conduce a calcoli molto lunghi che ne sconsigliano l'applicazione, ed anche casi in cui non si riesce a calcolare il risultato.

Per esempio, il limite indeterminato

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\infty}{\infty}$$ con l'Hospital fornisce

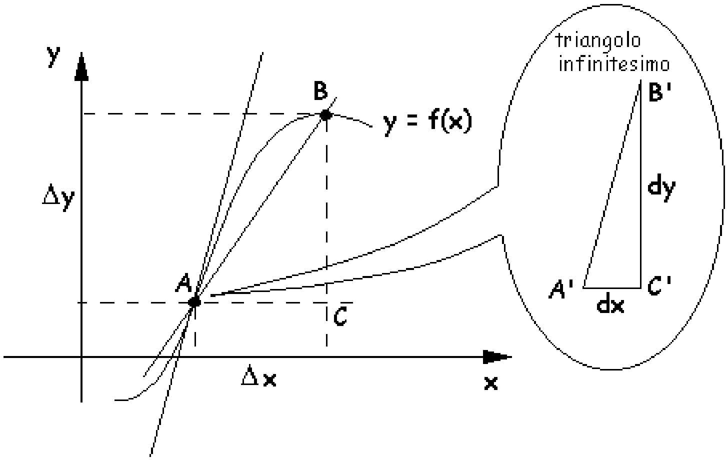
alternativamente frazioni uguali a quella iniziale, con numeratore e denominatore scambiati fra loro, senza portare mai al risultato definitivo (che è 1, e si ottiene immediatamente trascurando i termini +1 e -1 perché infiniti “di minor peso”).
Infine, nei limiti in cui la forma indeterminata è del tipo $\infty - \infty$ (che non permette l’applicazione del teorema dell’Hospital), si può talvolta ricorrere ad una manipolazione algebrica sfruttando l’identità

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$$

che trasforma il limite in una delle due forme indeterminate previste dal teorema dell’Hospital.
Però questa identità è molto scomoda da usare perché le derivate da calcolare sono un po' complesse.

CAP. 8 - GLI INTEGRALI

Par. 1 - Il concetto di differenziale



Data una funzione
y = f(x) derivabile nell'intervallo che ci interessa, consideriamo un generico punto $A \equiv [x; f(x)]$ ed un secondo punto B.
Sviluppando il concetto di derivata abbiamo visto come si può costruire il **rapporto incrementale Δy/Δx** e come questo corrisponda al coefficiente angolare della retta passante per A e B.
Con una operazione di limite (con Δx che tende a zero), si passava al concetto di derivata nel punto A, che corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente alla curva in A.
La derivata in A veniva indicata con il simbolo **f'(x)** o con il simbolo **dy/dx** (che è anche detta **notazione di Leibniz**).

In altre parole con la operazione di limite il triangolo si è impiccolito sempre più fino a diventare infinitesimo (vedi ingrandimento nella figura), e degenerare in un punto. L'ipotenusa A'B' è divenuta parallela alla tangente, e gli incrementi Δy e Δx sono diventati due infinitesimi (dy e dx).
Il triangolo è degenerato in un punto, ma se viene considerato come punto di arrivo di una operazione di limite, conserva delle caratteristiche metriche ben precise che possono essere riassunte nella relazione

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

che indica appunto la corrispondenza fra la derivata nel punto A e il rapporto fra i due infinitesimi dy e dx. Tale relazione può anche essere scritta nella forma

(1) $$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

La (1) si chiama anche **differenziale della funzione**, ed esprime dunque la relazione esistente fra i due infinitesimi dy e dx.

ESEMPIO 55

Data la funzione $y = 5x^3 - 4x + 1$ il differenziale della funzione, applicando la (1) è

$$dy = (15x^2 - 4)dx$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato anche derivando semplicemente la funzione e indicando la derivata con la notazione di Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 4$$

e spostando poi il dx nel secondo membro.

ESEMPIO 56

Data la funzione $y = \operatorname{sen}x \log x$ il differenziale si può ottenere sia applicando la (1)

$$dy = \left(\cos x \log x + \frac{\operatorname{sen}x}{x} \right) dx$$

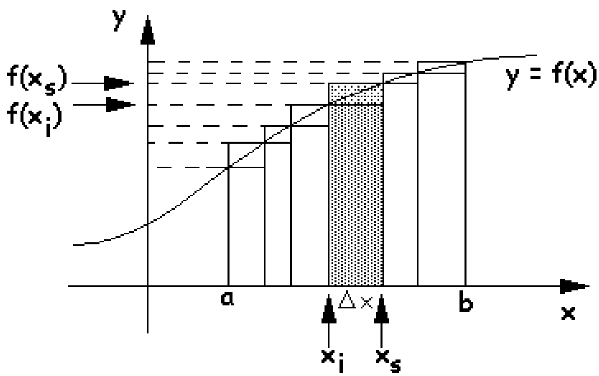
che derivando

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

e poi spostando il dx nel secondo membro.

E’ chiaro allora che **derivare** o **differenziare** costituiscono due aspetti diversi di una stessa operazione.

Par. 2 - L’integrale definito



Data una funzione **y = f(x) derivabile** nell’intervallo che ci interessa, consideriamo due ascisse arbitrarie **x = a** e **x = b** in tale intervallo.

Suddividiamo l’intervallo [a;b] in **n intervallini**, ciascuno di ampiezza **Δx**.

E’ importante osservare che non è affatto necessario che gli intervallini abbiano tutti la stessa ampiezza: si arriverebbe alle

stesse conclusioni anche assumendo che essi avessero ampiezza arbitraria.
Si vengono a formare (vedi figura) due serie di rettangolini:

- Chiamiamo con $\mathbf{x_i}$ l'ascissa di ciascun intervallino Δx **corrispondente alla ordinata f($\mathbf{x_i}$) minima** (nella figura coincide con l'estremo sinistro di Δx). Si viene a formare un primo gruppo di rettangoli segnati in figura con un colore più scuro. Questo gruppo di rettangoli (dato che ricorda una scala) prende il nome di **scaloide inscritto** e indicheremo la sua superficie con il simbolo $\mathbf{S_i}$.
- Chiamiamo invece con $\mathbf{x_s}$ l'ascissa **corrispondente alla ordinata f($\mathbf{x_s}$) massima** (nella figura coincide con l'estremo destro di Δx). Si forma ora un secondo gruppo di rettangoli costituito dai precedenti più i rettangolini superiori segnati in figura con un colore più chiaro. Questo gruppo di rettangoli prende il nome di **scaloide circoscritto** e la sua superficie la indicheremo con il simbolo $\mathbf{S_s}$.

Chiamiamo infine **trapezoide** la figura (che assomiglia ad un trapezio) avente come base il segmento ab, come bordi laterali quelli dei due scaloidi, e come base superiore la curva rappresentata dalla funzione y = f(x). **Ci proponiamo di calcolare l'area di questo trapezoide, che indicheremo con il simbolo S.**
Ciascuno dei due scaloidi ha un'area che approssima quella del trapezoide: nel nostro caso $\mathbf{S_s}$ è certamente minore di **S**, mentre $\mathbf{S_d}$ è certamente maggiore di **S**.
Vale quindi la disuguaglianza

$$S_i \leq S \leq S_s$$

Nel nostro esempio l'intervallo ab è stato suddiviso in n = 5 parti. Se ora aumentiamo il numero di parti ponendo

successivamente n = 10, 100, 1000 ... ci accorgiamo che i due scaloidi tendono entrambi ad **S**.
Cioè

(2)
$$\lim_{n\to\infty} S_i = S$$
$$\lim_{n\to\infty} S_s = S$$

E' sufficiente la condizione di continuità perché i due limiti (2) tendano entrambi ad S.
L'area del trapezoide viene indicata simbolicamente con

(3)
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

che si legge: **integrale da "a" a "b" di effe di x in de x.**
Si noti come il simbolo di integrale rappresenti schematizzato il simbolo di somma, infatti deve essere interpretato come la somma delle aree degli infiniti rettangolini (a partire da $x = a$ fino a $x = b$) aventi come base dx (il Δx con l'operazione di limite è divenuto dx), e come altezza f(x). Infatti con n che tende ad infinito tutti gli intervalli Δx (anche se non fossero stati tutti uguali) sono diventati infinitesimi e le ordinate $f(x_i)$ e $f(x_s)$ coincidono in un unico valore f(x).
Questo integrale si chiama **integrale definito** e corrisponde ad una superficie.
Non abbiamo ancora imparato a calcolarlo, ma possiamo ugualmente parlarne definendone le sue proprietà.

Par. 3 - Proprietà dell'integrale definito

PRIMA PROPRIETÀ

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

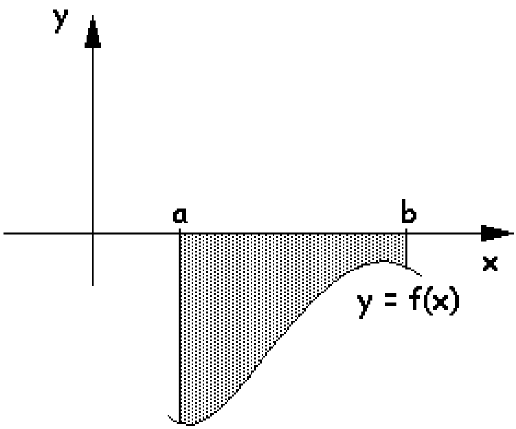
Infatti se l'intervallo [a;b] si restringe fino a diventare un unico punto, l'area del trapezoide si annulla.

SECONDA PROPRIETÀ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Se si invertono gli **estremi di integrazione** l'integrale cambia segno. Infatti ciò equivale a cambiare il segno della base e quindi la superficie diventa negativa, ma è una negatività di tipo algebrico: un'area deve infatti essere sempre positiva.

TERZA PROPRIETÀ

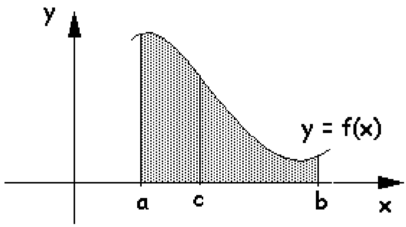


Può avvenire che la funzione si trovi sotto l'asse x. La superficie è nuovamente negativa (vedi figura a fianco): infatti questa volta sono le altezze dei rettangolini ad essere negative. Anche in questo caso la negatività è solo di natura algebrica.

Per ottenere il risultato corretto è sufficiente porre un segno meno davanti all'integrale, oppure scambiare fra loro gli estremi di integrazione.

QUARTA PROPRIETÀ

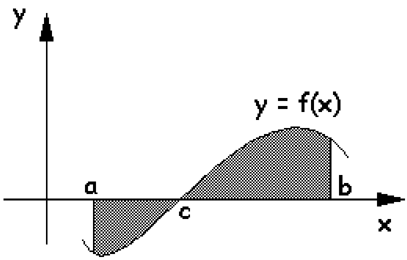
Se indichiamo con **c** un generico punto (interno o esterno all'intervallo [a;b]), è sempre possibile **suddividere** l'integrale in una somma di due integrali.



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(Vedi figura a fianco).
E' anche possibile **l'operazione contraria** e **unire** in un solo integrale la somma algebrica di due integrali.

QUINTA PROPRIETÀ



Può accadere che una funzione attraversi l'asse x: in questo caso possiamo immaginare di dividere l'integrale in una somma di due parti (vedi a fianco).

Il primo integrale (da **a** a **c**) ha risultato negativo, mentre il secondo ha risultato positivo.

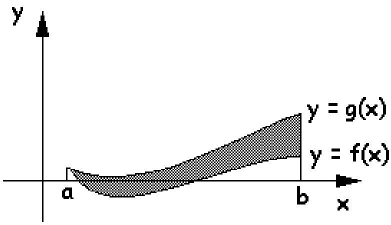
L'integrale da **a** a **b** fornisce un risultato errato: dà il totale algebrico costituito dalla sottrazione fra il l'area positiva e quella negativa.
In questo caso è necessario individuare il punto **c**, scomporre l'integrale in una somma di due integrali, e cambiare il segno a quello con area negativa.

Cioè

$$S = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

SESTA PROPRIETÀ

Se si deve calcolare l'area di una regione di piano contenuta fra due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ è sufficiente scrivere



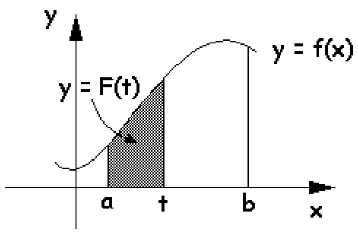
$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

Infatti i rettangolini continuano ad avere base dx, mentre la loro altezza è

(4) $[f(x) - g(x)]$.

Si noti che **non ha alcuna importanza se l'asse x attraversa la regione tratteggiata**, infatti in ogni caso la (4) rappresenta l'altezza del rettangolino e non occorre alcun cambio di segno.

Par. 4 - La funzione integrale



Si abbia, al solito, una funzione

$$y = f(x)$$

continua nell'intervallo che ci interessa.

Anche se non sappiamo ancora calcolare un integrale, possiamo però associare simbolicamente ad una superficie il simbolo

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Nella figura a fianco consideriamo la superficie della regione colorata: **l'estremo superiore è variabile** e perciò **anche l'area è variabile** (in funzione di t). Possiamo scrivere quindi

(5) $$\boxed{F(t) = \int_a^t f(x)dx}$$

Abbiamo indicato l'estremo superiore con t invece che con x per non fare confusione con la variabile indipendente x

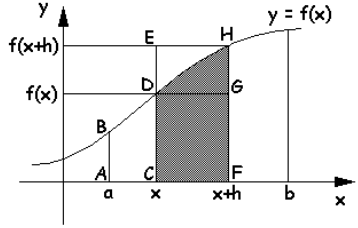
Par. 5 - Teorema di Torricelli-Barrow

Consideriamo ora la solita funzione continua

$y = f(x)$ e due ascisse arbitrarie

$x = t$ e

$x = t + h$ (come in figura).



Il trapezoide colorato ha una superficie compresa fra l'area del rettangolo CFGD e quella del rettangolo CFHE. Cioè

$$S_{CFGD} \leq S \leq S_{CFHE}$$

(Dove S è appunto l'area del trapezoide).
Questa disuguaglianza può anche essere scritta nel modo seguente

$$h \cdot f(x) \leq S \leq h \cdot f(x+h)$$

Ma è anche vero che S può essere ottenuta dalla sottrazione fra l'area del trapezoide AFHB e l'area del trapezoide ACDB. Quindi, usando il simbolo di funzione integrale, si ha

$$h \cdot f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \cdot f(x+h)$$

Dividendo ora tutti i membri per h, si ottiene

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Infine, facciamo il limite per h che tende a zero:

- Il termine centrale della (6) è il rapporto incrementale della funzione F(x), e quindi il limite corrisponde alla derivata F'(x).
- Poiché la funzione è continua il limite di f(x + h) diviene uguale a f(x).

E allora la (6) diventa

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

che implica necessariamente che sia

$$F'(x) = f(x)$$

Cioè la derivata della funzione integrale coincide con la funzione integranda.
Questo risultato è molto importante.
La funzione integrale può essere scritta nel modo seguente

(6) $$\boxed{\int_{t_0}^{t} f(x)dx = F(x)}$$

dove t_0 è una ascissa arbitraria, mentre t è una ascissa variabile: è allora inutile indicare gli estremi di integrazione, e si può scrivere direttamente

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Cioè la F(x) è quella particolare funzione che derivata restituisce la f(x).
La F(x) prende il nome di **funzione primitiva** della f(x).
In questo caso l'integrale non corrisponde più ad un'area, ad un numero, ma è una nuova funzione che si può ritenere ottenuta da una operazione inversa alla derivazione.
Poiché derivando la F(x) si ottiene la f(x), la primitiva F(x) è sempre definita a meno di una costante: in altre parole aggiungendo una costante C, la derivata di F(x) + C è sempre uguale a f(x).
Cioè

(7)
$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Il teorema di Torricelli-Barrow ci ha permesso di definire **l'integrale indefinito** e di riconoscere che esso rappresenta **l'operazione inversa della derivazione**. Ci ha quindi messo in grado, finalmente, di poter operare con gli integrali.

Par. 6 - Integrali immediati

Applicando al contrario le regole di derivazione, possiamo elaborare la seguente tabella di integrali immediati:

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx = K \cdot F(x) + C$$

$$\int [f(x) \pm g(g)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (\text{con } n \neq -1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

e, ricordando le regole di derivazione delle funzioni composte, possiamo ricavare anche la seguente tabella di integrali ... quasi immediati:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left[f(x)\right] + C$$
$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$$
$$\int f'(x)\cdot \cos\left[f(x)\right]dx = \operatorname{sen}\left[f(x)\right] + C$$
$$\int f'(x)\cdot \operatorname{sen}\left[f(x)\right]dx = -\cos\left[f(x)\right] + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx = -\operatorname{cotan} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

Par. 7 - Calcolo di un'area

Dalla (5) sappiamo che

(8) $$\boxed{\int_a^t f(x)dx = F(t) + C}$$

Ora portiamo la variabile t a coincidere una volta con b ed una volta con a:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + C$$
$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C$$

Da queste relazioni, sottraendo membro a membro, si ha

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

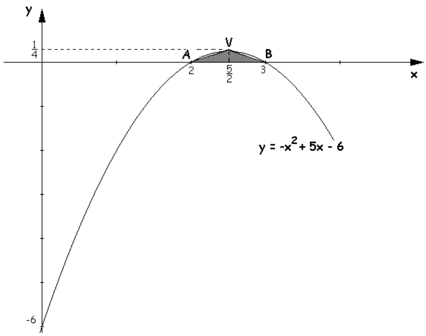
La costante C si elide e il secondo integrale a primo membro è nullo. Si ha dunque

(9) $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Formula utilissima che ci permette di calcolare l'area di una regione con contorno curvilineo.

ESEMPIO 57

Data la parabola
$y = - x^2 + 5x - 6$
calcoliamo l'area del **segmento parabolico** definito dall'asse x (cioè della regione di parabola compresa fra la parabola e l'asse x.



Avremo, applicando la (9),

$$S = \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x \right]_2^3 =$$

$$= (-9 + \frac{45}{2} - 18) - (-\frac{8}{3} + 10 - 12) = \frac{1}{6}$$

N.B. Si noti che l'area del **triangolo** ABV è $\mathbf{S_{ABV} = 1/8}$ e tale area moltiplicata per **4/3** fornisce appunto

$$S = \frac{4}{3} \cdot S_{ABV} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

Questo risultato è noto con il nome di **teorema di Archimede** (e vale per ogni parabola).

Par. 8 - Integrazione per sostituzione

Si debba calcolare l'integrale $\int \frac{x}{3-2x} dx$

Proviamo a introdurre una nuova variabile t ponendo

(10) $t = 3 - 2x$

Il metodo consiste nel sostituire la nuova variabile t al posto della x tentando di ottenere un nuovo integrale di facile soluzione. Spesso è possibile cambiare variabile in più modi e non in uno solo: non c'è alcun criterio per stabilire se il metodo è applicabile e quale sia la sostituzione più conveniente. Si deve solo provare e ... affidarsi all'esperienza acquisita con gli esercizi!

Nel nostro esempio dalla (10) si ottiene $x = \frac{3-t}{2}$ e differenziando si ha inoltre $dt = -2dx$ da cui si ricava $dx = -\frac{dt}{2}$.

Sostituendo nel nostro integrale si ha

$$\int \frac{x}{3-2x} dx = \int \frac{\frac{3-t}{2}}{t} \left(-\frac{dt}{2}\right) = \frac{1}{4} \int \frac{t-3}{t} dt = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{3}{t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left[t - 3\ln|t|\right] + C = \frac{3}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ln\left|\frac{3-2x}{2}\right| + C =$$

$$= -\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\ln|3-2x| + C$$

(Dove nell'ultimo passaggio tutte le costanti sono state inglobate nella costante C finale).

Par. 9 - Integrazione per parti

Data una funzione formata dal prodotto di altre due

(11) $$y = f(x)\, g(x)$$

differenziamola

$$dy = [f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)]\, dx$$
$$dy = f'(x)\, g(x)\, dx + f(x)\, g'(x)\, dx$$

isoliamo a primo membro uno dei due termini che si trovano nel secondo membro

$$f'(x)\, g(x)\, dx = dy - f(x)\, g'(x)\, dx$$

ed integriamo ambo i membri

(12) $$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + C}$$

dove l'integrale di dy è y e quindi per la (11) è uguale a f(x) g(x).

Questa formula permette talvolta di risolvere l'integrale se si riesce a fare in modo che l'integrale a secondo membro sia di facile soluzione.

ESEMPIO 58

Si voglia risolvere l'integrale $\int xe^x dx$ (in cui possiamo porre $f(x) = e^x$ e $g(x) = x$)

Le prime volte conviene elaborare un quadro con le corrispondenze rispetto alla (11)

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$g(x) = x$$
$$g'(x) = 1$$

Applicando ora la (11) si ottiene

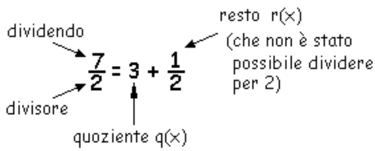
$$y = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx + C = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Par. 10 - Integrazione per scomposizione in frazioni elementari

Se la funzione da integrare è costituita da **una frazione algebrica razionale** (per semplicità prenderemo in esame solo i casi con denominatore di secondo grado), si può scomporre la frazione in una somma algebrica di frazioni più semplici e di facile integrazione.

Riduzione di una frazione:

In una generica divisione con resto possiamo distinguere il quoziente e il resto come indicato sotto.



Se prendiamo in considerazione per esempio la frazione

(13) $$\frac{x^3-6x^2+8x-1}{x^2-5x+6}$$

si può dividere il dividendo per il divisore e si ottiene come quoziente $q(x) = x - 1$ e come resto $r(x) = - 3x + 5$
Perciò la (13) si può scrivere nella forma

$$\frac{x^3-6x^2+8x-1}{x^2-5x+6}=x-1+\frac{5-3x}{x^2-5x+6}$$

Dovendo integrare la (13) possiamo allora integrare facilmente il polinomio $q(x) = x - 1$ e ridurre il problema alla integrazione di una nuova frazione

(14) $$\frac{5-3x}{x^2-5x+6}$$

con il numeratore di grado inferiore al denominatore.
Possiamo quindi limitarci a considerare frazioni con numeratore di grado minore del denominatore.
Una frazione di questo tipo può ancora essere scomposta distinguendo tre casi a seconda che il denominatore abbia due zeri reali e distinti (come nel nostro esempio: $x=2$ e $x=3$), due zeri reali coincidenti o due zeri complessi coniugati.

1° CASO (due zeri reali e distinti)

Ci proponiamo di scomporre la (14) in

(15) $$\frac{5-3x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

con A e B costanti da determinare. Per determinarle eliminiamo il denominatore:

$$5-3x=A(x-3)+B(x-2)$$

$$5-3x=x(A+B)-3A-2B$$

Applichiamo ora il "**principio di identità dei polinomi**", secondo il quale i polinomi nei due membri sono uguali se i coefficienti corrispondenti sono uguali fra loro. Si ottiene

$$A + B = -3$$

$$-3A - 2B = 5$$

Risolvendo si ottiene **A = 1** e **B = -4**. Sostituendo nella (15) si ha

$$\frac{5-3x}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-3}$$

Integrare la (15) è ora abbastanza facile:

$$\int \frac{5-3x}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{4}{x-3}dx = \ln|x-2| - 4\ln|x-3| + C =$$

$$= \ln\frac{|x-2|}{(x-3)^4} + C$$

2° CASO (due zeri reali e coincidenti)

Si abbia per esempio:

(16) $$\frac{5-3x}{x^2-4x+4}$$

Si può ancora applicare il principio di identità dei polinomi ponendo

$$\frac{5-3x}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

Sviluppando e risolvendo si ricavano **A = - 3** e **B = - 1**. La (16) si può allora scrivere:

$$\frac{5-3x}{x^2-4x+4} = -\frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

e l'integrale risulta

$$\int \frac{5-3x}{x^2-4x+4}dx = -\int \frac{3}{x-2}dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}dx = -3\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$$

3° CASO (due zeri complessi coniugati)

Si abbia ora, per esempio,

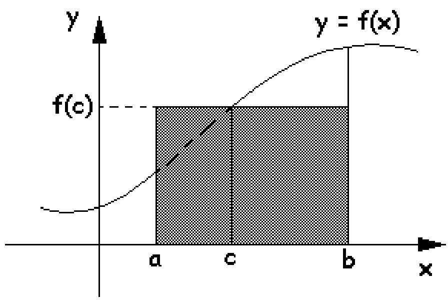
(17) $$\frac{5-3x}{x^2+4}$$

In questo caso si deve tentare di risolvere l'integrale ricorrendo all'ultimo integrale immediato del paragrafo 6 (quello dell'arco tangente).

$$\int \frac{5-3x}{x^2+4}dx = \int \frac{5}{x^2+4}dx - \int \frac{3x}{x^2+4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx =$$

$$= \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4\right| + C$$

Par. 11 - Teorema della media

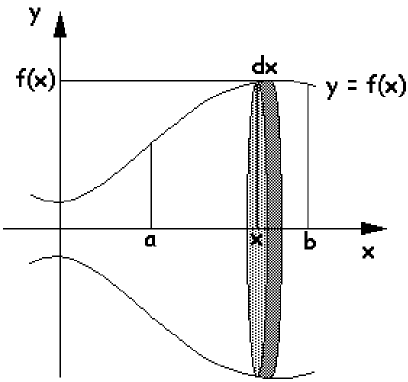


Data una funzione **y = f(x)** continua (e quindi integrabile) nell'intervallo [a;b], deve esistere almeno un punto **x = c** interno all'intervallo tale che

(18) $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)}$$

Cioè l'area del trapezoide deve per forza corrispondere all'area di un rettangolo cos base uguale a quella del trapezoide ed altezza opportuna.
La (18) esprime appunto l'equivalenza fra la superficie del trapezoide e quella del rettangolo.

Par. 12 - Volume di un solido di rotazione



Data al solito una generica

y = f(x)

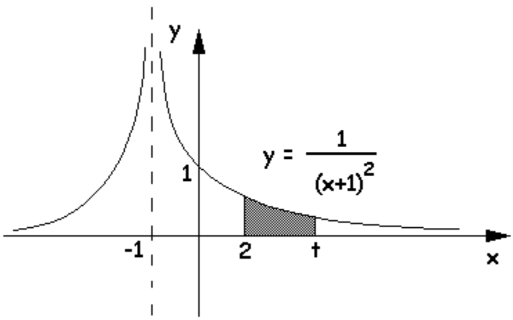
continua in tutto l'intervallo che ci interessa, prendiamo in esame **la superficie** che si genera facendo ruotare la funzione attorno all'asse delle ascisse.
Suddividendo l'intervallo [a;b] in intervallini, prendiamo in considerazione uno di essi, di ampiezza dx.
Si ha un rettangolino con base dx ed altezza f(x) che, ruotando, forma **un dischetto cilindrico con raggio di base f(x) e altezza dx**.
Il volume di questo cilindro con spessore infinitesimo è

$$dV = \pi\cdot(\text{raggio})^2\cdot\text{altezza} = \pi f^2(x)dx$$

Sommando i volumi di tutti i cilindretti compresi fra a e b, si ha

(19) $$\boxed{V=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

Par. 13 - Integrali impropri



Può avvenire che una regione di piano pur estendendosi fino all'infinito abbia un'area finita. Gli integrali di questo tipo si chiamano impropri. Si risolvono ricorrendo ad una variabile ausiliaria t, nel calcolare la superficie in funzione di t, ed infine facendo il limite per t che tende all'infinito o al valore finito opportuno.
Possiamo distinguere due casi diversi:

1° CASO

Consideriamo la retta $x = t$

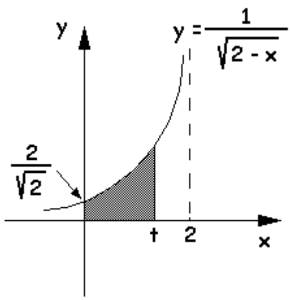
$$S(t) = \int_2^t \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_2^t =$$

$$= -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{t-2}{3t+3}$$

Con il limite si ha

$$S = \lim_{t\to\infty} \frac{t-2}{3t+3} = \frac{1}{3}$$

2° CASO



La funzione è definita per $x < 2$

Consideriamo anche ora la retta $x = t$

$$S(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \left[-2\sqrt{2-x}\,\right]_0^t =$$

$$= -2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{2}$$

Con il limite si ha

$$\lim_{t\to 2}\left(-2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

CAP. 9 - MATRICI

Par. 1 - Premesse sulle matrici

Una matrice A_{rc} (o semplicemente A), è costituita elementi (numerici o algebrici), disposti in una tabella su n righe ed m colonne.

Per esempio:

$$(1) \qquad A_{rc} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2c} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3c} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & ... & a_{rc} \end{vmatrix}$$

Se $r \neq c$ la matrice si dice **rettangolare**, mentre se $r = c$ la matrice si dice **quadrata**.

Solo per le matrici quadrate A_{nn} (con n righe ed n colonne) è possibile associare alla matrice stessa un risultato numerico detto **determinante** della matrice (ed indicato con il simbolo **det A_{nn}**).

Si chiama **minore di ordine k**, una qualsiasi **matrice quadrata** formata prendendo in modo arbitrario k righe e k colonne della (1).

Per esempio, uno dei minori di ordine 2 della (1) può essere formato prendendo le righe 2 e 3, e le colonne 1 e 3, è

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

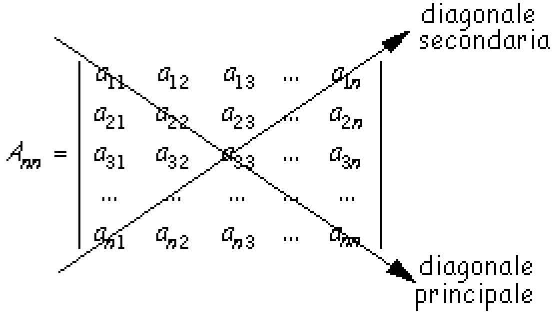
La **trasposta** di una matrice A è la nuova matrice $\mathbf{A^T}$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

Per esempio, la trasposta di

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{è} \quad A^T = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Par. 2 - Determinante di una matrice quadrata

Data una matrice quadrata di **ordine n** (cioè con n righe ed n colonne)



Chiameremo **diagonale principale** e **diagonale secondaria** gli elementi indicati nella figura.

Il **minore complementare** di un elemento $\mathbf{a_{jk}}$ della matrice è indicato con $\mathbf{A_{jk}}$ e corrisponde alla matrice che si ottiene sopprimendo in A la riga j e la colonna k.

Per esempio, data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

il minore complementare dell'elemento $a_{31} = 4$ si ottiene cancellando la terza riga e la prima colonna

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Si chiama invece **complemento algebrico** dell'elemento $\mathbf{a_{jk}}$ ed è indicato con A'_{jk}, il minore complementare moltiplicato per $(-1)^{j+k}$

$$A'_{jk} = (-1)^{j+k} A_{jk}$$

il fattore $(-1)^{j+k}$ rappresenta un utile artificio per sistemare il segno di A'_{jk} perché a seconda che j+k sia pari o dispari, il fattore è uguale ad 1 o -1. In altre parole il fattore serve solo per fare in modo che A_{jk} sia positivo o negativo.
Per esempio, il complemento algebrico dell'elemento a_{31} è

$$A'_{31} = (-1)^{3+1} A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

perché 3+1 è pari.
Come si fa a calcolare il determinante, cioè il valore da associare ad una matrice quadrata A_{nn}?
Se la matrice è del secondo ordine basta fare il prodotto degli elementi della diagonale principale meno il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.
Per esempio:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 6 + 1 = 7$$

Se invece la matrice è del terzo ordine, si può applicare la **regola di Sarrus**, che consiste nel ripetere le prime due colonne della matrice e formare tre diagonali parallele a quella principale, e tre diagonali parallele a quella secondaria (vedi figura), e nel calcolare il prodotto degli elementi di ciascuna diagonale.

Il determinante è costituito dalla somma dei prodotti delle prime tre diagonali, meno i prodotti delle ultime tre diagonali.
Per esempio:

$$A = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{matrix} = [2\cdot(-1)\cdot 2]+[3\cdot 2\cdot 4]+[1\cdot 0\cdot 1]-[4\cdot(-1)\cdot 1]-[1\cdot 2\cdot 2]-[2\cdot 0\cdot 3] =$$

$$= -4+24+4-4 = 20$$

La regola di Sarrus si può applicare però solo alle matrici quadrate del terzo ordine.
Per risolvere le matrici di ordine superiore al terzo, indicando con h una generica riga o colonna, si deve applicare la regola seguente

$$(2)\quad \boxed{\begin{aligned} &\det A = \sum_{c=1}^{n} (-1)^{h+c} \cdot a_{hc} \cdot A'_{hc} \\ \text{oppure}\quad &\det A = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+h} \cdot a_{rh} \cdot A'_{rh} \end{aligned}}$$

Per esempio, data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

prendiamo in considerazione gli elementi della prima colonna.
Si ha (applicando la seconda formula con h = 1)

$$\det A =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2-2) + 4(6+1) = 20$$

Stesso risultato prima ottenuto (e più facilmente) con la regola di Sarrus, che però non è applicabile a matrici quadrate di ordine maggiore del terzo.
Per matrici del quarto ordine (o maggiore), la (2) può essere riapplicata ottenendo ogni volta espressioni con matrici con un ordine minore.
Conviene applicare la (2) scegliendo una riga o colonna in cui siano presenti uno o più elementi nulli (come abbiamo fatto nell'esempio), perché in questo modo il calcolo si semplifica.
Vedi comunque l'esempio alla fine del paragrafo successivo.

Par. 3 - Proprietà delle matrici quadrate

Data una matrice quadrata A di ordine n:

- Il determinante di A non cambia scambiando le righe con le colonne ($\det A = \det A^T$).
- Scambiando fra loro due righe (o due colonne) il determinante cambia di segno.
- Se due righe o due colonne sono uguali, il determinante è nullo (infatti deve cambiare segno per la proprietà precedente, ma nello stesso tempo rimane invariato perché le due linee sono uguali, quindi non può che essere nullo).
- Moltiplicando gli elementi di una linea (riga o colonna) per i corrispondenti complementi algebrici **di un'altra linea parallela**, e sommando i prodotti così ottenuti, il risultato è sempre uguale a zero (primo teorema di Laplace).
- Moltiplicando gli elementi di una linea (riga o colonna) per i corrispondenti complementi algebrici **della stessa linea**, e sommando i prodotti così ottenuti, il risultato è uguale al **det A** (secondo teorema di Laplace). Questa proprietà corrisponde alla formula (2).

- Moltiplicando tutti gli elementi di una riga o di una colonna per una costante K, anche il determinante di A risulta moltiplicato per K.
- Scomponendo gli elementi di una riga o colonna in una somma algebrica, la matrice può essere suddivisa nella somma di due matrici

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2 & 7-5 & 4+1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Una matrice con due righe o colonne costituite da elementi rispettivamente proporzionali, è nulla. Infatti, per esempio,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Se agli elementi di una linea (riga o colonna) si aggiungono gli elementi di un'altra linea parallela moltiplicati per una costante K, il valore del determinante non cambia.
- **Aggiungendo ad una linea (riga o colonna) una combinazione lineare di altre linee, il determinante non cambia**.
- Se invece **una linea (riga o colonna) coincide con una combinazione lineare di altre linee, il determinante è nullo**.

- Il prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è una nuova matrice (dello stesso ordine), i cui elementi sono i prodotti dei corrispondenti elementi.
- Il determinante di A non cambia se aggiungiamo ad una riga o colonna gli elementi di un'altra linea parallela moltiplicati (o divisi) per una costante. Per esempio, data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

sommiamo alla seconda colonna gli elementi della prima moltiplicati per K. Si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 2+3K & 5 \\ 1 & 0+K & 3 \\ 4 & -1+4K & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3K & 5 \\ 1 & K & 3 \\ 4 & 4K & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + K \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = A + 0 = A$$

Quest'ultima proprietà è molto utile per facilitare il calcolo di matrici quadrate di grandi dimensioni.
Infatti possiamo modificare la matrice trasformandola in un'altra equivalente con diversi zeri in una riga o colonna, in modo che l'applicazione della formula (2) porti a calcoli più semplici.

ESEMPIO 59

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 15 \\ -\frac{2}{5} & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

moltiplichiamo gli elementi della prima riga per 3 e quelli della prima colonna per 5.
La matrice risulta moltiplicata per 15, e quindi si ha

$$15 \cdot A = \begin{vmatrix} 15 & -6 & 2 & 12 \\ 15 & 0 & 5 & 15 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ora sostituiamo agli elementi della prima colonna il risultato della sottrazione fra la prima colonna e l'ultima. Si ottiene

$$A = \frac{1}{15} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ -6 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ora sostituiamo all'ultima colonna la quarta colonna meno la terza moltiplicata per 3

$$A = \frac{1}{15} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Nella seconda riga abbiamo ottenuto tutti gli elementi nulli tranne uno.
Applicando la (2) agli elementi di questa riga si ha

$$A = \frac{1}{15} \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -6 & 3 & 13 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{15} \cdot 5 \cdot [-27 + 36 - 156 - 36 + 108 + 39] = \frac{36}{3} = 12$$

Par. 4 - Operazioni fra matrici

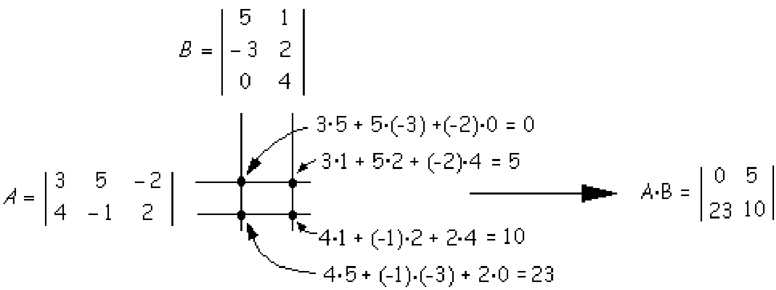
- Somma algebrica fra matrici (quadrate o rettangolari)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{vmatrix}$$

- Prodotto (o divisione) di una matrice (quadrata o rettangolare) per una costante

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}$$

Date due matrici (quadrate o rettangolari) A e B, tali che **il numero delle colonne della prima corrisponda al numero delle righe dell'altra**, il prodotto righe per colonne si esegue disponendo le due matrici come in figura



poi si deve costruire una nuova matrice sostituendo ad ogni incrocio (evidenziato con un punto nero) i prodotti degli elementi corrispondenti sommati fra loro.

Non occorre che il numero delle righe della prima corrisponda al numero delle colonne della seconda.
Se ciò avviene (come nell'esempio precedente), il risultato del prodotto è una matrice quadrata, altrimenti sarà una matrice rettangolare.
Questo prodotto non gode della proprietà commutativa, in quanto scambiando fra loro le due matrici iniziali il risultato generalmente cambia (o addirittura non è possibile).
Una applicazione interessante di questo prodotto si ha nel procedimento per calcolare la matrice inversa di una matrice quadrata A.
Se $\det A \neq 0$, si chiama **matrice inversa** di A (e si indica con **A^{-1}**) quella per cui

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}$$

(dove il prodotto si intende righe per colonne).
La matrice **I** si chiama **matrice unitaria** (è una matrice quadrata formata da tutti zeri, meno gli elementi della diagonale principale che sono tutti uguali ad 1). Il suo determinante è sempre uguale ad 1.
Per ottenere la matrice inversa di A occorre prima calcolare la **matrice aggiunta** (che si indica con **A^{agg}**) e che corrisponde alla matrice trasposta di quella che si ottiene sostituendo ad ogni elemento il corrispondente complemento algebrico.
Poi ogni elemento di A^{agg} va diviso per il det A, e si ottiene la matrice inversa A^{-1}.
Per esempio:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{la matrice con i complementi algebrici è} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{la sua trasposta è} \quad A^{agg} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{il det } A = 10 \text{ e quindi la matrice inversa è} \longrightarrow A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{vmatrix}$$

E’ facile constatare che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{vmatrix}$$

$$3 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{-1}{10} = 1$$

$$3 \cdot \frac{-1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \longrightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$1 \cdot \frac{-1}{5} + 4 \cdot \frac{3}{10} = 1$$

$$1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{-1}{10} = 0$$

Quindi la matrice inversa si trova applicando la formula

(3) $$\boxed{A^{-1} = \frac{A^{agg}}{\det A}}$$

Par. 5 - La regola di Cramer

Sia dato il sistema lineare con n equazioni ed n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad + \quad ... \quad + \quad ... \quad + \quad .... \quad + \quad ... \quad = \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ed indichiamo con A (con determinante non nullo), la matrice formata dai coefficienti delle incognite

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e le matrici A_K (con K che va da 1 ad n)

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

che si ottengono sostituendo di volta in volta, i **termini noti** alla K-esima colonna.

ESEMPIO 60

Dato il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

Si ha

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 12 + 4 + 10 - 16 - 6 = -16 \neq 0$$

$$A_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -40 + 9 + 10 + 25 - 12 - 12 = -20$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 20 + 8 - 6 - 10 - 32 = -8$$

$$A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 24 + 6 + 20 - 9 - 20 = -4$$

e quindi le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-20}{-16} = \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-8}{-16} = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{-4}{-16} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Par. 6 - Il teorema di Rouché-Capelli

Occorre premettere la definizione di **caratteristica** (o **rango**) di una matrice (rettangolare o quadrata).

Data una matrice, si devono prendere in considerazione tutti i minori di grado più alto possibile (per esempio di grado K), e se ne deve calcolare il determinante.

Se almeno uno di essi è diverso da zero, allora K è la caratteristica della matrice.

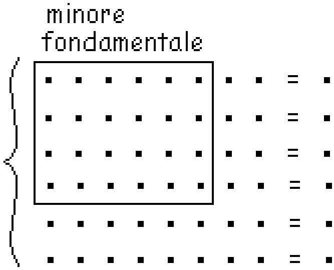
Se invece sono tutti nulli, si devono prendere in considerazione tutti i minori di ordine K-1, e se ne deve calcolare il determinante.

Se almeno uno di essi è diverso da zero, allora K-1 è la caratteristica della matrice.
Se sono tutti nulli, si prendono in considerazione tutti i minori di ordine K-2, e così via fino a quando non si trova un minore non nullo.
L'ordine massimo dei minori non nulli, è la caratteristica della matrice.
Per esempio, la matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

ha tutti i minori del 3° ordine nulli, e quindi la caratteristica non è 3.
Ma il minore del secondo ordine $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ e dunque, tralasciando gli altri minori, possiamo affermare che **la caratteristica della matrice è 2**.
Se anche tutti i minori del secondo ordine fossero stati nulli, allora la caratteristica della matrice sarebbe stata uguale ad 1.
Ora possiamo enunciare il teorema di Rouché-Capelli:
Chiamiamo **matrice incompleta** del sistema, quella formata con i coefficienti delle incognite. E **matrice completa** quella formata dalla matrice precedente cui è stata aggiunta la colonna dei termini noti.
Ebbene, il sistema ammette soluzioni se e solo se queste due matrici hanno la stessa caratteristica.
Chiamiamo **minore fondamentale (di ordine n**) del sistema uno qualsiasi (a nostro arbitrio) dei minori (non nulli), che permettono di determinare la caratteristica.

Se necessario scambiamo l'ordine delle equazioni e delle incognite, in modo che quelle i cui coefficienti appartengono al minore fondamentale, risultino per prime in alto a sinistra.



Indicando con r il numero di equazioni del sistema e con c il numero delle incognite, si possono presentare i seguenti casi:

- r = c = n

In questo caso non ci sono incognite né equazioni in eccesso: ci troviamo nella situazione prevista dalla regola di Cramer, il sistema ha soluzione e questa è calcolabile con la regola stessa.

- n < c

In questo caso trasportiamo nel secondo membro i termini con le incognite in eccesso, e consideriamole come parte dei termini noti.
Ovviamente le soluzioni conterranno queste incognite eccedenti, che saranno considerate come parametri. Il sistema ammette infinite soluzioni.

- n < r

Le equazioni in eccesso possono essere ignorate perché sono formate da una combinazione lineare delle equazioni precedenti.
Le soluzioni trovate utilizzando soltanto le prime n equazioni soddisferanno anche quelle eccedenti.

Par. 7 - I sistemi omogenei

Sono quei sistemi lineari i cui termini noti sono tutti nulli.
Consideriamo un sistema omogeneo di r equazioni e c incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1c}x_c = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2c}x_c = 0 \\ ... + ... + ... + ... + ... = ... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rc}x_c = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette sempre la soluzione ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots , x_c = 0$) costituita da tutti zeri e denominata **soluzione banale** (in quanto senza alcun interesse).
Se la matrice dei coefficienti è quadrata, ed ha una caratteristica uguale al numero delle equazioni, esiste solo la soluzione banale.
In caso contrario il sistema ammette delle soluzioni non banali, dette **autosoluzioni**.
Data una autosoluzione

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ \dots ,\ x_c = n$$

il sistema ammette anche la soluzione

$$x_1 = ka,\ x_2 = kb,\ \dots ,\ x_c = kn$$

costituita dalla precedente moltiplicata per una costante k arbitraria.

ESEMPIO 61

Dato il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$$

La caratteristica della matrice dei coefficienti è uguale a 2 in quanto $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Portando l'incognita z nel secondo membro e considerandola come un termine noto, si ha

$$\begin{cases} x+y=-z \\ 2x+y=3z \end{cases}$$

A questo sistema (che non è più omogeneo) posso applicare la regola di Cramer trovando $\begin{cases} x = 4z \\ y = -5z \end{cases}$.

Infine, ponendo z = k, abbiamo le autosoluzioni (infinite)

$$\begin{cases} x = 4k \\ y = -5k \\ z = k \end{cases}$$

ESEMPIO 62

Dato il sistema

$$\begin{cases} \boxed{x+2y}+z=0 \\ \boxed{2x+y}+z=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è nulla. Ma il minore del secondo ordine evidenziato nella figura (minore fondamentale) è

diverso da zero, e quindi la caratteristica della matrice dei coefficienti è uguale a 2.
Allora ignoriamo la terza equazione e, come nell'esempio precedente, portiamo la z nel secondo membro considerandola come termine noto.

$$\begin{cases} x + 2y = -z \\ 2x + y = -z \end{cases}$$

Applicando la regola di Cramer si trova

$$\begin{cases} x = -\dfrac{z}{3} \\ y = -\dfrac{z}{3} \end{cases}$$

Infine, ponendo z = k, abbiamo le autosoluzioni (infinite)

$$\begin{cases} x = -\dfrac{k}{3} \\ y = -\dfrac{k}{3} \\ z = k \end{cases}$$

Queste soluzioni soddisfano anche la terza equazione tralasciata nel sistema iniziale.

ESEMPIO 63

Il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

ammette invece soltanto la soluzione banale

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

perché la caratteristica della matrice dei coefficienti è uguale a 3, cioè è quadrata ed è uguale al numero delle equazioni.

CAP. 10 - CALCOLO VETTORIALE

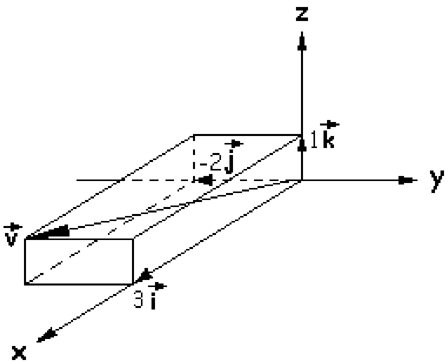
Par. 1 - Elementi di calcolo vettoriale

Molte grandezze fisiche sono completamente descritte dal valore numerico della loro grandezza (per esempio il tempo, la temperatura, il volume, ecc).
Ma altre grandezze fisiche (per esempio la forza, la velocità, l'accelerazione, lo spostamento, ecc), hanno bisogno anche della conoscenza della **direzione** verso la quale sono rivolte.
Le prime si chiamano **grandezze scalari**, le seconde vengono invece dette **grandezze vettoriali**.
Queste ultime vengono rappresentate con una freccetta detta vettore.
Un vettore è caratterizzato da:

- La **lunghezza** della freccia (detta anche intensità o modulo).
- Una **direzione**, costituita dalla retta che attraversa il vettore (che si chiama anche **retta di applicazione**).
- Un **verso**, fissato dalla punta della freccia.

Il punto iniziale della freccia si chiama **punto di applicazione** del vettore.
Spostando un vettore parallelamente a se stesso con una traslazione si ha un vettore **equipollente** (o **equivalente**) a quello iniziale.
Tipograficamente il vettore viene indicato con una lettera sulla quale si trova una piccola freccetta, oppure più semplicemente con una lettera scritta in grassetto.
Un vettore può essere espresso (con molti vantaggi) utilizzando i **versori**.
Un versore è un vettore di lunghezza unitaria avente una direzione prestabilita.

Nei casi in cui esso è parallelo all'asse x lo indicheremo con il simbolo **i**, quando è parallelo all'asse y lo indicheremo con **j**, ed infine quando è parallelo all'asse z (nello spazio a 3 dimensioni), lo indicheremo con **k**.
Il versore serve in definitiva a rendere vettoriale una grandezza scalare senza alterarne il valore, perché moltiplicando uno scalare per il versore, si ottiene un vettore diretto come il versore e con lunghezza pari al valore scalare.



Se il valore scalare è negativo il vettore cambia anche il verso.
Questo criterio permette di esprimere un vettore in modo molto sintetico ed espressivo.

Per esempio, il vettore

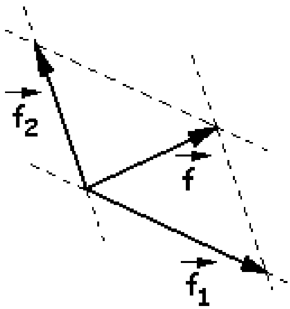
$$\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

è formato dalla somma (vettoriale) di tre vettori:

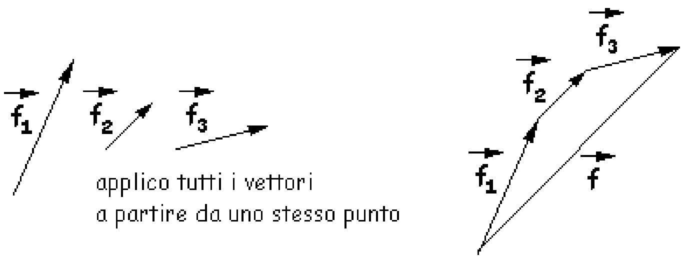
- 3 **i** è un vettore con lunghezza tre e diretto come l'asse x.
- -2 **j** è un vettore con lunghezza due e diretto come l'asse y (ma con verso opposto).
- **k** è un vettore con lunghezza unitaria e diretto come l'asse z.

Componendo con la regola del parallelogramma prima due vettori (a caso) e poi ancora con la regola del parallelogramma il risultato ottenuto con il terzo ed ultimo vettore, si ottiene appunto il vettore **v**.

Somma algebrica fra vettori



La somma fra due vettori si esegue applicando i due vettori in uno stesso punto, e costruendo un parallelogramma.
La diagonale del parallelogramma (vedi figura a fianco) fornisce il vettore **f** risultante.
Al contrario un vettore può essere scomposto in due componenti $\mathbf{f_1}$ e $\mathbf{f_2}$ applicando al contrario la regola del parallelogramma.
Chiaramente questa operazione si può fare in infiniti modi differenti. Essa diventa unica solo se vengono assegnate le direzioni che devono avere le componenti.
Per sommare tre (o più) vettori fra loro, si può applicare più volte successivamente la regola del parallelogramma: prima trovo la risultante fra due vettori e poi trovo la risultante fra questa e il terzo vettore.
Qualunque sia l'ordine con cui si prendono i vettori, il vettore finale sarà sempre lo stesso.



Questo metodo però risulta un po' laborioso.
Si preferisce ricavare il risultante disponendo i tre vettori in fila (anche qui non importa l'ordine con cui si prendono), in modo che l'inizio di ogni vettore coincida con la punta del precedente.
Il vettore **f** che unisce l'inizio del primo con la punta dell'ultimo è il vettore risultante.
Questo metodo grafico prende il nome di **metodo del poligono funicolare**.
Per sottrarre fra loro due vettori basta sommare il primo vettore per l'opposto del secondo:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Come si possono sommare due vettori sfruttando la loro rappresentazione con i versori?
Siano dati due vettori

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{cases}$$

la somma algebrica (attenzione a non confondere la somma scalare con quella vettoriale!) è

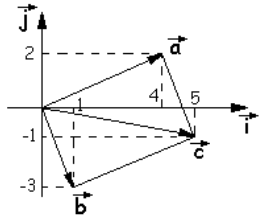
$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$$

Sostituendo si ottiene

(1)

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j}}$$

ESEMPIO 64



Passando dalle lettere ad un esempio numerico, si ha

$$\begin{cases} \vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} \end{cases}$$

La somma vettoriale è

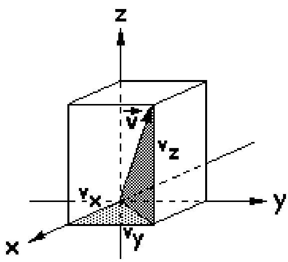
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (4+1)\vec{i} + (2-3)\vec{j} = 5\vec{i} - \vec{j}$$

come si può verificare nella figura a fianco, tale risultato corrisponde proprio alla diagonale del parallelogramma formato dai due vettori **a** e **b**.

Norma di un vettore

Dato un vettore

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$



La **lunghezza** del vettore (detta anche **norma**, ed indicata con il simbolo $\|\vec{v}\|$) si trova applicando il teorema di Pitagora (prima nel piano orizzontale fra v_x e v_y, e poi nel piano verticale fra il risultato precedente e v_z).

Si ottiene

(2) $$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

o anche

$$\|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

Moltiplicando uno scalare per un vettore si ottiene come risultato un nuovo vettore parallelo a quello dato, la cui lunghezza risulta moltiplicata per lo scalare.
Così il vettore 3**a** è un vettore parallelo e concorde ad **a**, ma con lunghezza pari a tre volte quella di **a**.
Il vettore –**a** è un vettore parallelo e concorde ad **a**, ma con verso opposto.

Par. 2 - Prodotto scalare fra due vettori

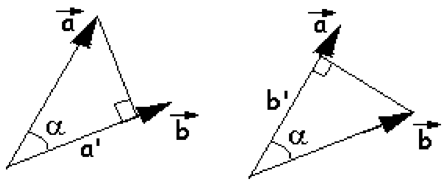
Dati due vettori **a** e **b** il loro prodotto scalare è un numero c (quindi uno scalare e non un vettore) corrispondente al prodotto della lunghezza di **a** per la proiezione di **b** lungo la direzione di **a**, oppure (vedremo che è la stessa cosa) al prodotto della lunghezza di **b** per la proiezione di **a** lungo la direzione di **b**.
Il prodotto scalare si indica con un puntino.
Osservando la figura alla pagina seguente si ricava allora che (proiettando **a** lungo **b** come nella costruzione a sinistra)

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a' \cdot b = a\cos\alpha \cdot b = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

Mentre, proiettando **b** lungo **a** come nella costruzione a destra, si ha

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b' = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

Come si vede, in entrambi i casi si ha lo stesso risultato. Quindi



il prodotto scalare **gode della proprietà commutativa**.
Quindi per calcolare il prodotto scalare vale la formula

(3) $$\boxed{c = \vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha}$$

Se la (3) fornisce un risultato positivo, allora l'angolo fra i due vettori è acuto. Se invece il risultato è negativo, l'angolo è ottuso.
Se infine il risultato è nullo, i due vettori sono perpendicolari fra loro.
Quindi il prodotto scalare può essere nullo anche quando entrambi i vettori non sono nulli, ma sono **perpendicolari fra loro**.
Infatti in questo caso la proiezione di un vettore lungo la direzione dell'altro è nulla.
Vediamo ora come si calcola il prodotto scalare per mezzo dei versori.
Dati due vettori

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{cases}$$

Il loro prodotto scalare è

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \bullet (b_x \vec{i} + b_y \vec{j})$$

ed applicando la proprietà distributiva

$$c = a_x b_x \vec{i} \bullet \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \bullet \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \bullet \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \bullet \vec{j}$$

Ebbene, moltiplicando scalarmene fra loro i versori, si ha

$$\begin{cases} \vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \\ \vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \end{cases}$$

e quindi il prodotto scalare fra i vettori **a** e **b**, è semplicemente

(4) $$\boxed{c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y}$$

Se invece i vettori si trovano **nello spazio a tre dimensioni**, si ha

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases}$$

e il prodotto scalare (con una ovvia generalizzazione) diviene

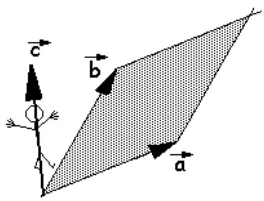
(5) $$\boxed{c = \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Ricordando la (2) si può scrivere la norma di un vettore anche sotto la forma

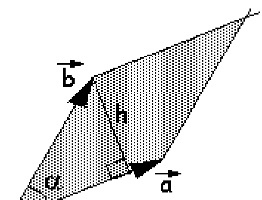
(6) $$\boxed{\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z} = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}}$$

Par. 3 - Prodotto vettoriale fra due vettori

Dati due vettori **a** e **b** il loro prodotto vettoriale è un vettore **c** (quindi un vettore e non uno scalare),
avente le seguenti caratteristiche:



- La lunghezza di **c** corrisponde all'area del parallelogramma formato da **a** e **b** (ombreggiato nella figura).
- La direzione di **c** corrisponde a quella di una retta perpendicolare al piano su cui si trovano **a** e **b** (quindi la sua direzione è perpendicolare al foglio).



- Il verso di **c** è tale che tale vettore "personificato" deve vedere il primo vettore **a** ruotare in verso antiorario per sovrapporsi a **b**, lungo la via più breve (vedi figura).

Il prodotto vettoriale si indica con una crocetta analoga al segno di moltiplicazione.
Abbiamo detto che la lunghezza del vettore **c** corrisponde all'area del parallelogramma.
Considerando come base del parallelogramma il lato a, la sua altezza è h. Poiché nel triangolo rettangolo della figura qui a fianco risulta $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ l'area del parallelogramma è

$$c = \text{base per altezza} = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Anche il prodotto vettoriale ha una proprietà importante: esso è nullo quando almeno uno dei due vettori **a** e **b** è nullo, ma è nullo anche quando pur essendo entrambi i vettori non nulli, essi **sono paralleli fra loro**.
Infatti in questo caso il parallelogramma si schiaccia fino ad assumere una superficie nulla.
Si noti anche che, a differenza del prodotto scalare, quello vettoriale non gode della proprietà commutativa. Infatti scambiando fra loro i due vettori **a** e **b**, il vettore **c** cambia verso.
In altre parole

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \qquad \text{mentre} \qquad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

Come si calcola il prodotto vettoriale utilizzando i versori?
Poiché il vettore **c** è perpendicolare ad **a** e **b**, è necessario prendere in considerazione un riferimento cartesiano in tre dimensioni anziché due.
Quindi i due vettori moltiplicati vettorialmente fra loro saranno espressi con tre versori invece di due (**i j** e **k** dove l'ultimo versore è parallelo all'asse z).
Dati dunque

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \end{cases}$$

si ha

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

Applicando la proprietà distributiva si ha

$$\begin{aligned} \vec{c} &= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + \\ &+ a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

Ora, ricordando che i versori sono sempre perpendicolari fra loro, e applicando la regola che permette di stabilire il verso e quindi il segno del prodotto vettoriale, moltiplicando vettorialmente i versori fra loro, si ha

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \text{e quindi} \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \text{e quindi} \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \text{e quindi} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{cases}$$

mentre

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

perché i versori sono paralleli fra loro.

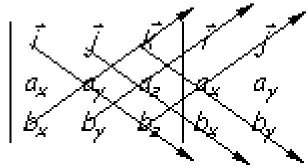
Sostituendo nel prodotto vettoriale fra i vettori **a** e **b**, si ottiene

(7) $$\boxed{\vec{c} = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i}}$$

Ora osserviamo la seguente matrice quadrata del terzo ordine (cioè con tre righe e tre colonne)

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Questa può risolversi con la regola di **Sarrus**, che consiste nel ripetere le prime due colonne, poi occorre tracciare tre freccette rivolte diagonalmente verso il basso (**diagonali principali**) e tre freccette rivolte diagonalmente verso l'alto (**diagonali secondarie**), come nella figura.



Ebbene, la matrice equivale alla somma dei prodotti degli elementi appartenenti alle diagonali principali meno i prodotti degli elementi appartenenti alle diagonali secondarie.
Si può constatare che sviluppando la matrice nel modo indicato si riottiene esattamente il valore del vettore **c**.
Quindi il prodotto vettoriale si può calcolare semplicemente formando una matrice quadrata in cui nella prima riga compaiono i tre versori degli assi, nella seconda riga le tre componenti del primo vettore **a**, e nella terza riga le tre componenti del secondo vettore **b**.

ESEMPIO 65

Dati i vettori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}$ si ha

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k} - 6\vec{k} - \vec{j} + 0\vec{i} =$$

$$= 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

Par. 4 - Proprietà ed esempi

Angolo fra due vettori

Dati due vettori

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{cases}$$

dalla (3) abbiamo

(9) $$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Vettore normale ad una retta

Data una retta $ax + by + c = 0$ ed il vettore $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ il vettore è perpendicolare alla retta.

Infatti prendendo due punti arbitrari sulla retta

$$\begin{cases} A \equiv (x_1 ; y_1) \\ B \equiv (x_2 ; y_2) \end{cases}$$

il vettore

$$\vec{u} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$$

giace sulla retta stessa.

Ora imponiamo alla retta di passare per i due punti A e B

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

e sottraiamo membro a membro.
Si ottiene

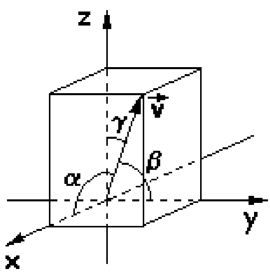
$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$$

che può essere interpretato come il prodotto scalare (vedi la 4) fra $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e $\vec{u} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$.
E poiché tale prodotto scalare è nullo, i due vettori sono perpendicolari fra loro.

Coseni direttori di un vettore

Dato un vettore **v**, i suoi **coseni direttori** sono i coseni degli angoli che il vettore forma con gli assi coordinati.
Si ha

(10) $$\boxed{\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{v_x}{\|v\|} \\ \cos\beta = \dfrac{v_y}{\|v\|} \\ \cos\gamma = \dfrac{v_z}{\|v\|} \end{cases}}$$



Dato un vettore

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

dividendolo per $\|\vec{v}\|$ si ottiene un vettore parallelo al vettore dato, ma di lunghezza unitaria.
In altre parole si ottiene un versore parallelo al vettore dato

(11) $$\boxed{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_x}{\|\vec{v}\|}\vec{i} + \frac{v_y}{\|\vec{v}\|}\vec{j} + \frac{v_z}{\|\vec{v}\|}\vec{k} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}}$$

espresso per mezzo dei coseni direttori.

Proiezioni di un vettore rispetto ad un altro

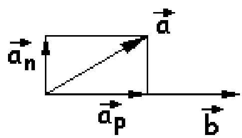
Dati infine due vettori **a** e **b**, i vettori $\mathbf{a_p}$ (proiezione di **a** parallelo a **b**) e $\mathbf{a_n}$ (proiezione di **a** normale, perpendicolare a **b**), sono

(12) $$\boxed{\begin{cases} \vec{a}_p = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} \\ \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_p \end{cases}}$$

Infatti

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_n$$

ma $\mathbf{a_p}$ è un vettore parallelo a **b** e con lunghezza proporzionale a **b** secondo una costante k da determinare. Quindi



$$\vec{a} = k\vec{b} + \vec{a}_n$$

Ora moltiplichiamo scalarmene ambo i membri per **b**

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(k\vec{b} + \vec{a}_n\right) \bullet \vec{b} = k\vec{b} \bullet \vec{b} + \vec{a}_n \bullet \vec{b}$$

L'ultimo termine è nullo perché è un prodotto scalare fra vettori perpendicolari fra loro.
Si ottiene

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = k\vec{b} \bullet \vec{b} = k\left\|\vec{b}\right\|^2 \qquad \text{cioè}$$

$$k = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2} \qquad \text{(è uno scalare !)}$$

Poiché $\vec{a}_p = k\vec{b}$, sostituendo si ottiene la prima delle (12).

Inoltre $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_p$, ed anche la seconda delle (12) è dimostrata.

Esempio 66

$$\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

Risulta

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 15$$

$$\|b\|^2 = 4^2 + 1^2 + 2^2 = 21$$

e quindi la proiezione del vettore **a** parallela al vettore **b**, è

$$\vec{a}_p = \frac{15}{21}\left(4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = \frac{5}{7}\left(4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = \frac{20}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{10}{7}\vec{k}$$

mentre la proiezione del vettore **a** normale al vettore **b**, è

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_p = \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) - \left(\frac{20}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{10}{7}\vec{k}\right) =$$

$$= -\frac{6}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{11}{7}\vec{k}$$

Lunghezza della proiezione di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$

Dalla prima delle (12) $\vec{a}_p = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$ ricaviamo la lunghezza di

a_p

$$\|\vec{a}_p\| = \left\| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} \right\| = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \|\vec{b}\| \qquad \text{(si ricordi che } \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \text{ è uno scalare)}$$

cioè

$$\|\vec{a}_p\| = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\cos\theta|}{\|\vec{b}\|} = \|\vec{a}\| \cdot |\cos\theta| \qquad \text{(dove } \theta \text{ è l'angolo fra } \vec{a} \text{ e } \vec{b}\text{)}$$

Identità di Lagrange

(13) $$\boxed{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2}$$

Infatti, sviluppando separatamente i due membri, si ha dalla (6)

$$\begin{cases} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)^2 + \\ \qquad + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2 \\ \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} \bullet \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \bullet \vec{b}\right) - \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)^2 \end{cases}$$

e semplificando si ottengono due espressioni identiche.

Prodotto misto

Dati tre vettori

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \\ \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \end{cases}$$

Si chiama **prodotto misto** l'espressione

$$\vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)$$

Si dimostra che

(14) $$\boxed{\vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

Il risultato è una grandezza scalare.

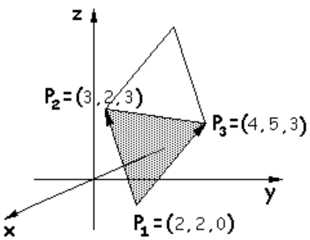
Vale inoltre la proprietà circolare

(15) $$\boxed{\vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{c} \bullet \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \vec{b} \bullet \left(\vec{c} \times \vec{a} \right)}$$

Infine, se i tre vettori sono applicati ad uno stesso punto, e se il prodotto misto è nullo, allora i tre vettori sono complanari.

Area di un triangolo dati i tre vertici

Tre punti (P_1,P_2, P_3) individuano un triangolo nello spazio a tre dimensioni.



Consideriamo i due vettori

$$\begin{cases} P_1P_2 = \vec{i} + 3\vec{K} \\ P_1P_3 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{K} \end{cases}$$

Il loro prodotto vettoriale corrisponde ad un vettore la cui grandezza è uguale all'area del

parallelogramma.
Quindi la norma di tale vettore, divisa per due, fornisce proprio l'area ombreggiata, che è quella del triangolo. Quindi

$$\text{Area}_{(P_1P_2P_3)} = \frac{1}{2}\left\| P_1P_2 \times P_1P_3 \right\| = \frac{1}{2}\left\| -9\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

Equazione vettoriale della retta passante per due punti, nello spazio

Dati due punti

$$A \equiv \left(x_A ; y_A ; z_A \right) \qquad B \equiv \left(x_B ; y_B ; z_B \right)$$

il vettore

$$AB = \left(x_B - x_A \right)\vec{i} + \left(y_B - y_A \right)\vec{j} + \left(z_B - z_A \right)\vec{k}$$

è diretto come la retta.
Ora consideriamo il vettore $\mathbf{r_0}$ che va dall'origine ad uno dei due punti (per esempio A)

$$\vec{r}_0 = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

L'equazione vettoriale della retta è allora

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + AB \cdot t}$$

in cui t è un parametro, al cui variare si hanno tutti i punti della retta. Si ha

$$\vec{r} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + \left[\left(x_B - x_A \right)\vec{i} + \left(y_B - y_A \right)\vec{j} + \left(z_B - z_A \right)\vec{k} \right] \cdot t$$

$$\vec{r} = \left[x_A + \left(x_B - x_A \right) \cdot t \right]\vec{i} + \left[y_A + \left(y_B - y_A \right) \cdot t \right]\vec{j} + \left[z_A + \left(z_B - z_A \right) \cdot t \right]\vec{k}$$

$$\vec{r} = \left[x_A \left(1 - t \right) + x_B \right]\vec{i} + \left[y_A \left(1 - t \right) + y_B \right]\vec{j} + \left[z_A \left(1 - t \right) + z_B \right]\vec{k}$$

Equazione del piano passante per un punto e normale ad un vettore

Dato un punto $P_0 \equiv (x_0; y_0; z_0)$ ed un vettore (non nullo) $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, vogliamo scrivere l'equazione del piano passante per P_0 e normale al piano **n**.

Ebbene, ricordando il significato di prodotto scalare, il piano è formato da tutti i punti di coordinate $P \equiv (x; y; z)$ tali che

$$\boxed{P_0P \bullet \vec{n} = 0}$$

Si ottiene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

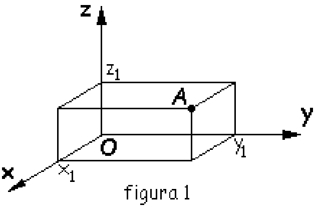
e, sviluppando e semplificando,

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

in cui i coefficienti a, b, e c sono proprio le componenti del vettore **n**.

CAP. 11 - GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Par. 1 – Rette e piani

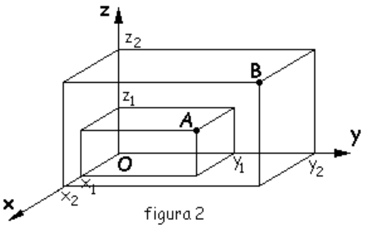


Dato un punto A nello spazio, esso è individuato da una terna ordinata di numeri reali

$$A \equiv (x_1; y_1; z_1)$$

Se i punti sono due (A e B), possiamo determinare sia le coordinate del **punto medio M,** che la **distanza** fra tali punti con una immediata estensione delle già note formule di geometria analitica nel piano.

(1)
$$M \equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$



Piani

Nella geometria analitica del piano l'equazione di una retta passante per due punti A e B con coordinate note, può essere scritta nel modo seguente

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dove nella prima riga ci sono le coordinate del punto P variabile sulla retta, mentre nella seconda e nella terza riga ci sono le coordinate dei punti A e B.

La terza colonna ha il significato di terza coordinata (in quanto i punti sono espressi in coordinate omogenee).

Sviluppando secondo gli elementi della prima riga si ottiene l'equazione della retta.

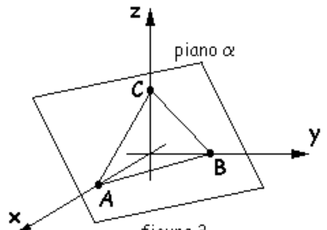


figura 3

Ebbene, estendendo il concetto allo spazio in tre dimensioni, dati tre punti A, B e C, l’equazione del piano si ottiene sviluppando la matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

in cui nella prima riga ci sono le coordinate del punto P variabile sul piano.

Nella figura 3 i tre punti A, B e C sono stati presi sugli assi coordinati solo per ragioni di migliore interpretazione del disegno.

Sviluppando secondo gli elementi della prima riga e semplificando, si trova un'equazione del tipo

(2) $$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Nel piano l'equazione della retta può essere scritta in forma segmentarla

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

in cui p e q sono le lunghezze dei segmenti che vanno dall'origine ai punti in cui la retta taglia gli assi x ed y rispettivamente.

In modo perfettamente analogo, anche l'equazione del piano nello spazio in tre dimensioni può essere messo nella forma segmentaria

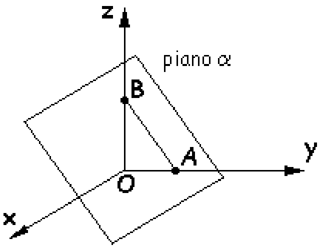


figura 4

(3) $$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{h}=1$$

dove i coefficienti p q ed h rappresentano le lunghezze dei segmenti che vanno dall'origine ai punti di intersezione (A, B e C) del piano con gli assi.

Vediamo ora cosa avviene se nella equazione (2) mancano uno o più termini.

- Se a = 0 (cioè se manca il termine in x) allora **il piano è parallelo all'asse x**, come nella figura 4 (il segmento AB è l'intersezione fra il piano dato ed il piano yz; i segmenti OA e OB sono rispettivamente uguali a q e ad h nella equazione 3).

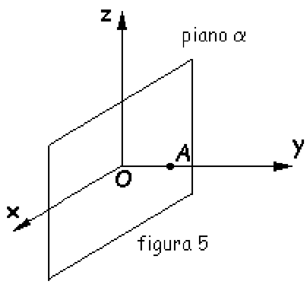


figura 5

- Se a = 0 ed anche d = 0 allora il piano passa anche per l'origine e perciò il piano contiene l'asse x (ed è perpendicolare al piano yz).

- Se invece mancano due termini con l'incognita (per esempio il termine in x e quello in z, cioè se è a = 0 e

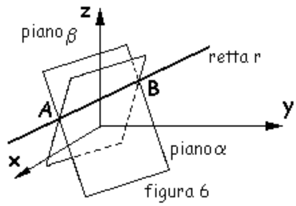
c = 0) allora il piano è parallelo al piano xz.
In tal caso l'equazione del piano è del tipo

$$\mathbf{y = q}$$

Se manca anche il termine noto, l'equazione diviene y = 0 ed il piano dato coincide con il piano xz.

Rette

Dalla intersezione fra due piani si ottiene una retta r, quindi una retta si ottiene mettendo a sistema le equazioni di due piani

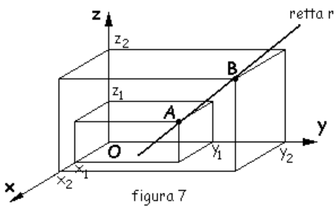


$$(4) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Oppure, conoscendo le coordinate di due punti A e B della retta, si può usare una estensione della formula valida nel piano

$$(5) \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Questa equazione a tre membri equivale a due equazioni distinte ottenibili prendendo una volta il primo ed il terzo membro, ed un'altra volta il secondo ed il terzo (o combinando i tre membri a due a due in un altro modo qualsiasi).



I denominatori della (5) sono dei numeri che corrispondono ai segmenti l m ed n della figura 7, e prendono il nome di **parametri direttori**.

Quindi la (5) può anche essere scritta
(6)

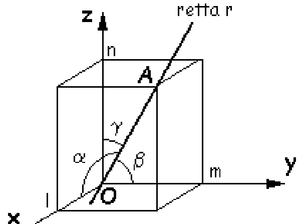


figura 8

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

Se facciamo coincidere il punto A con l'origine degli assi, allora la (6) diviene

(7) $$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

e si ha una retta generica passante per l'origine
I parametri direttori corrispondono ora ai segmenti

$$OL = l$$
$$OM = m$$
$$ON = n$$

Proponiamoci di calcolare i coseni degli angoli α β e γ che la retta r forma con gli assi coordinati.
Nei tre triangoli rettangoli OLA, OMA e ONA, ricordando che la lunghezza del segmento OA corrisponde a

$$OA=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

si ha

(8)
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\pm l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{\pm m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{\pm n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \end{cases}$$

Queste grandezze vengono dette **coseni direttori della retta**, e il loro valore rimane invariato anche se la retta r non passa per l'origine.
Si noti che i parametri direttori sono **proporzionali** ai coseni direttori, ma non coincidono con essi ed il fattore di proporzionalità è la radice che si trova nei denominatori delle (8).
La formula (6) può allora essere scritta anche nel modo seguente

$$\frac{x-x_0}{\frac{\pm l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}} = \frac{y-y_0}{\frac{\pm m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}} = \frac{z-z_0}{\frac{\pm n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}}$$

che, indicando con il parametro t il valore costante dei tre rapporti, può anche essere scritta

(9)
$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma} = t$$

Il parametro t rappresenta **la lunghezza del segmento di retta** che va dal punto $A \equiv (x_0; y_0; z_0)$ al punto generico che scorre sulla retta $P \equiv (x; y; z)$,
Dalle (9) si ottengono

(10)
$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

che insieme alle (4) e (6) costituiscono un terzo modo per scrivere l'equazione della retta, e prendono il nome di **retta in forma parametrica**.

Par. 2 - Condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Stella di piani

Nella geometria analitica del piano è noto che la formula del fascio di rette passanti per un punto si può ottenere realizzando una combinazione lineare di due qualunque rette del fascio (dette **sostegno** del fascio).

Dato un punto $A \equiv (x_0; y_0)$ si possono utilizzare le due rette

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

passanti per A e parallele agli assi coordinati.

L'equazione del fascio di rette è

$$\left(x - x_0\right) + k\left(y - y_0\right) = 0$$

Allo stesso modo, se si vuole realizzare una formula che comprenda tutte le rette passanti per un punto di coordinate $A \equiv (x_0; y_0; z_0)$ basterà formare una combinazione lineare fra i tre piani passanti per A e paralleli ai tre piani coordinati xy xz yz

(11)
$$\boxed{(x - x_0) + k(y - y_0) + h(z - z_0) = 0}$$

In verità i parametri della combinazione lineare dovrebbero essere tre, ma immaginando di dividere la (11) per uno di essi,

ci si convince che solo due di essi sono indipendenti: il terzo può sempre essere posto uguale ad 1.
La stella di piani costituisce infatti un ∞^2 piani o, come si dice, il sistema di piani ha due gradi di libertà.

Fascio di piani

Una combinazione lineare fra due piani

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

dipende invece da un solo parametro, ed al variare di k si hanno tutti i punti che si trovano su **una retta fissa detta retta base** del fascio (nel caso della stella di piani la base era invece **un punto**).

Piani paralleli

I coefficienti delle incognite debbono essere in rapporto costante fra loro (in quanto solo da essi dipende l'orientamento del piano).
Quindi deve essere

(12)
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

se poi anche per i termini noti il rapporto ha lo stesso valore, allora i due piani sono coincidenti.

Rette parallele

Due rette sono parallele se i loro coseni direttori sono uguali (o, ciò che è lo stesso, se sono uguali i loro parametri direttori)

(13)
$$\boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Parallelismo retta - piano

Dati un piano π ed una retta r sia $A \equiv (x_0; y_0; z_0)$ un punto generico della retta.
Il piano e la retta hanno quindi equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

Ricorrendo alle (10) la retta può essere scritta nella forma parametrica

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

da cui si possono ricavare le

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a t il sistema formato dall'equazione del piano e da queste equazioni della retta, si ottiene la lunghezza t del segmento di retta che va dal punto A al punto in cui la retta attraversa il piano π.
Facendo i calcoli si ottiene

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{al + bm + cn}$$

Ebbene, il piano π e la retta r saranno paralleli fra loro se il parametro t è infinito, cioè se si annulla il denominatore della frazione.
Dunque la condizione di parallelismo cercata è

(14) $$\boxed{al + bm + cn = 0}$$

Angolo fra due rette
Considerando due **versori** (vettori unitari) giacenti sulle due rette, si può dimostrare che l'angolo θ da esse formato corrisponde al **prodotto scalare** fra tali vettori.
Fra i parametri direttori vale allora la relazione

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

cioè

$$\cos\vartheta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Perpendicolarità fra rette
Due rette sono perpendicolari fra loro se l'angolo θ da esse formato è di 90°, cioè se il numeratore della relazione precedente è nullo.
Quindi se si ha

(15) $$\boxed{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

Retta normale ad un piano
Data l'equazione di un piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

Si è visto nella (3) che

$$AO = p = - d/a$$
$$BO = q = - d/b$$
$$CO = h = - d/c$$

del resto, osservando la figura 9, conduciamo dall'origine la retta ON perpendicolare al piano π.
Gli angoli ONA ONB e ONC sono retti.

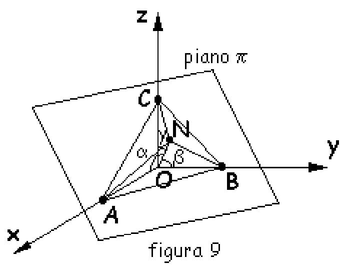


figura 9

Nel triangolo ONA si ha per esempio:

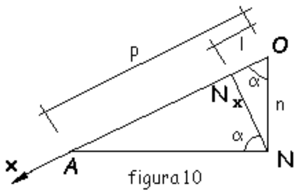
$$\cos\alpha = \frac{ON}{OA} = \frac{n}{p} = -\frac{na}{d}$$

ma è anche, nel triangolo rettangolo ONN_X

$$\cos\alpha = \frac{ON_x}{ON} = \frac{l}{n}$$

uguagliando fra loro gli ultimi membri delle due ultime relazioni, se ne trae che

$$l = -\frac{n^2}{d}a = ka$$



cioè i coefficienti l ed a sono proporzionali secondo il fattore k.
Ripetendo lo stesso ragionamento nei triangoli ONB ed ONC si trova in modo analogo

$$m = kb$$
$$n = kc$$

dove la costante di proporzionalità k ha sempre lo stesso valore.
Dunque i coefficienti a b c delle incognite nell'equazione di un piano coincidono con i parametri direttori della retta ON perpendicolare al piano (a meno di una costante di proporzionalità, ma del resto anche i parametri direttori sono a loro volta proporzionali ai coseni direttori, quindi tali coefficienti sono proporzionali anche ai coseni direttori).
Quindi si ha

(18)
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

Perpendicolarità fra due piani

Poiché ad ogni piano possiamo associare la propria **retta normale** avente come parametri direttori i coefficienti a b e c, due piani generici risulteranno perpendicolari fra loro se tali risultano le corrispondenti rette normali.
Quindi la condizione richiesta è

(19)
$$\boxed{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$$

Distanza punto - piano

Con immediata estensione con la analoga formula della geometria nel piano, si può dimostrare che

(20)
$$\boxed{\text{distanza} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Retta e piano perpendicolari

Per lo stesso motivo deve essere

(21) $a/l = b/m = c/n$

Piano per un punto, perpendicolare ad una retta

(22) $$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

Volume di un tetraedro

Analogamente all'area di un triangolo nel piano, si ottiene

(23) $$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Se V = 0 i quattro punti risultano allineati su uno stesso piano.

Minima distanza fra due rette

$$\text{distanza} = \frac{1}{\text{sen}\vartheta}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}$$

dove

$$\cos\vartheta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Par. 3 - Le quadriche

Una quadrica è una superficie nello spazio espressa algebricamente da una funzione di secondo grado con due variabili indipendenti ed una dipendente.
In forma implicita

$$f(x.y.z) = 0$$

Nella forma più generica essa ha la forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x +$$
$$+2a_{24y} + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

La funzione ha 10 parametri di cui però solo 9 sono indipendenti (infatti per esempio basta dividere tutta la funzione per a_{11} per ridurli a 9).
Se la matrice quadrata A formata dai coefficienti è nulla, allora la quadrica si dice **specializzata**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Le quadriche specializzate possono essere
1.Rette distinte incidenti (cono)
2.Rette distinte parallele (cilindro)
3.Due piani distinti paralleli
4.Due piani coincidenti

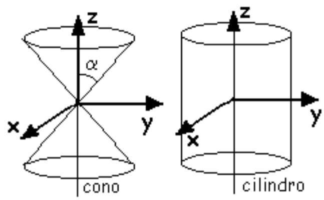


figura 11

Nel caso del cono si ha l'equazione
$x^2 + y^2 - z^2 \tan\alpha = 0$ mentre nel caso del cilindro si ha $x^2 + y^2 = r^2$

Piani diametrali

Le equazioni dei piani diametrali, cioè dei piani che passano per il centro della conica e sono normali a due assi coordinati, sono

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

e corrispondono ai piani polari dei tre punti impropri (punti all'infinito) aventi le direzioni degli assi coordinati.

Quadriche in forma ridotta

Se la quadrica è in forma ridotta i piani diametrali passano per l'origine e perciò deve essere

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$$

inoltre essi giacciono sui piani coordinati (xy = 0 xz = 0 yz = 0) e quindi deve anche essere

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

La quadrica assume allora la forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$$

o, più semplicemente,

(1) $$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$$

che rappresenta una quadrica non specializzata, a centro, riferita ai tre piani coordinati.

Per le quadriche non specializzate e non a centro (paraboloidi), si ha invece

(2) $$ax^2 + by^2 + cz = 0$$

dove l'asse di simmetria è l'asse z.
Nella (1) se d = 0 allora si ha la quadrica specializzata in un cono, mentre se c = 0 allora si ha la quadrica specializzata in un cilindro.

Tipi di quadriche

Ogni quadrica a centro può essere messa sotto la forma segmentaria

(3) $$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$$

dove m n p costituiscono i tre semiassi, cioè le tre intersezioni della quadrica con gli assi coordinati.
A seconda del segno dei tre termini a primo membro si ha

+	+	+	ellissoide reale
-	-	-	ellissoide immaginario
+	+	-	iperboloide iperbolico (ad 1 falda)
-	-	+	iperboloide ellittico (a 2 falde)

Le quadriche non a centro, in modo analogo, possono essere messe sotto la forma

(4) $$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=z$$

e a seconda del segno si ha

+	+	paraboloide ellittico
-	+	paraboloide iperbolico

Passiamo ora ad analizzare la rispettiva forma geometrica di tali quadriche.
Nella figura 12 è rappresentato l'ellissoide reale, di equazione

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$$

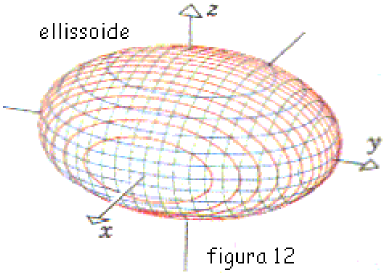


figura 12

Le intersezioni con piani perpendicolari agli assi sono in ogni caso delle ellissi.
L'**ellissoide immaginario** ovviamente non può essere rappresentato graficamente.

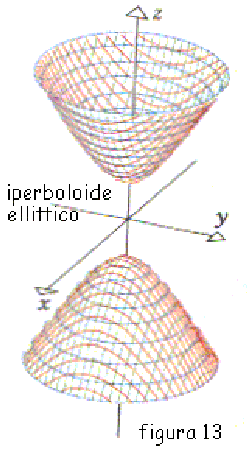


figura 13

C'è poi l'**iperboloide ellittico** della figura 13, la cui equazione è

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}-\frac{z^2}{p^2}=-1$$

Le intersezioni con i piani perpendicolari agli assi y e z sono delle iperboli, mentre le intersezioni con il piano perpendicolare all'asse x è una ellisse (reale o immaginaria).

iperboloide iperbolico

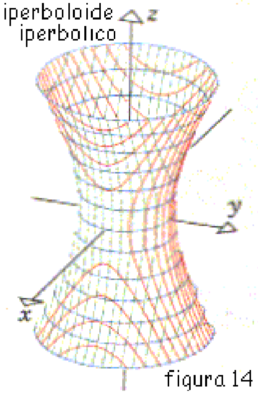


figura 14

In figura 14, è invece riprodotto l'**iperboloide iperbolico**, di equazione

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}-\frac{z^2}{p^2}=1$$

Le intersezioni con i piani perpendicolari all'asse z sono delle ellissi (di cui quello più piccolo si chiama ellisse di gola), mentre le intersezioni con i piani perpendicolari agli assi x e y sono delle iperboli.

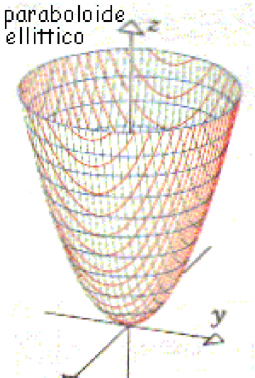


figura 15

In figura 15 abbiamo il **paraboloide ellittico**, di equazione

$$z = \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2}$$

Le intersezioni con i piani perpendicolari all'asse z sono delle ellissi, mentre le intersezioni con i piani perpendicolari agli assi x e y sono delle parabole.

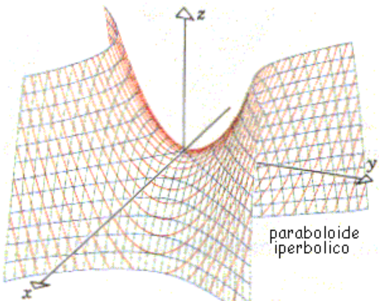


figura 16

Infine, in figura 16 si ha il **paraboloide iperbolico**, avente equazione

$$z = \frac{y^2}{n^2} - \frac{x^2}{m^2}$$

Le intersezioni con un piano perpendicolare all'asse z produce delle iperboli, mentre le intersezioni con piani perpendicolari agli assi x ed y sono delle parabole.

Par. 4 - Invarianti

La quadrica generica possiede alcune caratteristiche metriche che con una **trasformazione isometrica (rotazione o traslazione)**, rimangono costanti: queste grandezze prendono il nome di invarianti della quadrica.

Questi invarianti sono:

1. La matrice quadrata A del quarto ordine vista all'inizio.
2. Il complemento algebrico A_{44} di A.
3. La somma $I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
4. L'espressione

$$J = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2$$

Con tre di questi quattro invarianti è possibile costruire la seguente equazione

(5) $k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0$

che corrisponde allo sviluppo della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

Le tre soluzioni della (5) **sono sempre tutte e tre reali** (perché la matrice è simmetrica).
Si possono distinguere i casi seguenti:

1° CASO

$$A_{44} \neq 0$$

La quadrica è a centro e l'equazione ridotta è

$$k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$$

dove k_1 k_2 e k_3 sono le tre soluzioni della (5).
In questo caso:

- Se $A = 0$ allora la quadrica è un **cono** (reale se k_1 k_2 e k_3 hanno segno concorde, ed immaginario nel caso contrario).
- Se A diverso da 0, allora occorre confrontare il segno di $\mathbf{-A/A_{44}}$ con i segni delle tre soluzioni $\mathbf{k_1}$ $\mathbf{k_2}$ e $\mathbf{k_3}$.
- Se due soluzioni sono di segno concorde con $\mathbf{-A/A_{44}}$ allora la quadrica è un **ellissoide**.
- Se una sola soluzione è concorde, la quadrica è un **iperboloide ad una falda**.
- Se infine tutte e tre le soluzione sono di segno opposto a $\mathbf{-A/A_{44}}$ allora la quadrica è un **iperboloide a due falde**.

2° CASO
Una delle tre soluzioni è nulla (per $A_{44} = 0$ esempio $k_3 = 0$). La quadrica è un paraboloide e l'equazione ridotta è

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 \pm 2z\sqrt{-\frac{A}{J}} = 0$$

Se le due soluzioni k_1 k_2 sono concordi, allora **il paraboloide è ellittico**, altrimenti è **iperbolico**.

3° CASO
Tutte e tre le soluzioni k_1 k_2 e k_3 sono nulle: la quadrica è un **cilindro iperbolico**

4° CASO
Due delle tre soluzioni sono nulle: la quadrica è un **cilindro parabolico**.
Questi risultati possono essere raccolti nella seguente tabella riepilogativa

k_1	k_2	k_3	A_{44}	A	Tipo di quadrica
±	±	±	±	+ 0 -	Ellissoide immaginario Cono immaginario Ellissoide reale
±	m	m	±	+ 0 -	Iperboloide ad 1 falda Cono reale Iperboloide a 2 falde
±	±	0	0	- 0	Paraboloide ellittico Cilindro ellittico
±	m	0	0	+ 0	Paraboloide iperbolico Cilindro iperbolico
±	0	0	0	0	Cilindro parabolico