Paolo Bonavoglia

IL CALCOLO INFINITESIMALE

Analisi per i licei alla maniera non standard

www.matematicamente.it – libri@matematicamente.it

La versione digitale dell'opera
è disponibile gratuitamente al sito
www.matematicamente.it

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

ISBN 9788896354131

Sommario

PREFAZIONE

L'analisi nei licei

Analisi nei licei sì o no? E se sì in che modo e in che misura? Una domanda che si ripropone ad ogni riforma o riordino delle scuole superiori. Nei licei italiani l'analisi fu inserita a inizio Novecento in occasione della riforma Credaro; a stilarne i programmi fu chiamato Guido Castelnuovo che così giustificò questa scelta:

> «Ma se si vuole che l'allievo delle scuole medie senta di questa matematica moderna il soffio ispiratore ed intravveda la grandezza dell'edifizio, occorre parlargli del concetto di funzione ed indicargli sia pure sommariamente, le due operazioni che costituiscono il fondamento del Calcolo infinitesimale.»[1]

Allora l'analisi fu inserita solo nel liceo moderno, che fu poi soppresso dalla riforma Gentile del 1923 e in qualche misura sostituito dal liceo scientifico che ereditò l'analisi come materia conclusiva del corso di matematica. Nei licei classici dove il peso della matematica fu ridimensionato l'analisi continuò a restare fuori, come del resto la geometria analitica.
Di fatto la geometria analitica fu inserita dopo la guerra nei libri di testo del liceo classico e collocata tra la prima e seconda liceo (terzo e quarto anno); l'analisi continuò a restarne fuori con l'eccezione della sperimentazione PNI diffusisi tra gli anni Ottanta e Novanta.
Negli istituti tecnici l'analisi c'è sempre stata e viene in genere trattata già nel quarto anno di corso, a volte anticipando anche al terzo.
Ma come viene affrontata l'analisi nei licei?

1 Il passo è tratto da LIVIA GIACARDI - *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità al Fascismo in Da Casati a Gentile* ... Agorà Publishing 2006 pag.44

Caratteristiche di fondo sono:

1. L'analisi è in genere posta al termine del corso di studi.
2. Si segue la sequenza limiti, derivate, integrali come all'Università, con inevitabili alleggerimenti ma sempre secondo l'impostazione Cauchy-Weierstrass.
3. Nessun cenno viene fatto alla storia del calcolo infinitesimale.
4. Obiettivo principale se non unico sembra essere quello di addestrare gli studenti in vista delle facoltà scientifiche.

Un simile approccio presenta più di un difetto:

1. La collocazione al termine del corso comporta molto spesso il taglio degli ultimi argomenti, e si tratta quasi sempre degli integrali, cassando così proprio una della due operazioni fondamentali di cui parlava Castelnuovo, in una certa misura la più importante di tutte. È quasi la norma che lo studente debba studiare in gran dettaglio i limiti e i teoremi sui limiti e solo in modo frettoloso gli integrali.
2. Questa collocazione rende di fatto impossibili ogni collegamento con il programma di Fisica.
3. Si comincia dai limiti, scontrandosi con le ben note difficoltà della definizione *epsilon-delta* di Weierstrass e con la notevole complicazione di quasi tutte le dimostrazioni.
4. Non viene fatto alcun cenno alla storia dell'analisi che viene presentata come una dottrina caduta dal cielo così com'è; non sembra questa la scelta didatticamente migliore in un liceo.

L'approccio NSA presentato in questo libro cerca di superare questi difetti, anche se verosimilmente si tratta solo di un primo tentativo che può essere migliorato.

Il libro si basa sull'esperienza personale dell'autore, esperienza che può certamente essere migliorata, ma che mi pare sufficiente a convincere dei vantaggi che questo approccio darebbe all'insegnamento dell'analisi.

INTRODUZIONE STORICA

Il ritorno dell'infinitesimo

È un ramo della matematica dai molti nomi, all'inizio si chiamò *calcolo infinitesimale*, o anche *calcolo differenziale*, poi fu detto *calcolo sublime*, sin dall'inizio ebbe anche il nome di *analisi* a volte come *analisi matematica*, altre come *analisi infinitesimale*.
Chi oggi studia analisi nelle scuole secondarie o all'Università faticherà a capire il motivo di quell'aggettivo *infinitesimale* che ogni tanto riappare.
Perché oltre ad aver cambiato più volte di nome, l'analisi ha anche cambiato le sue stesse fondamenta.
All'inizio con Leibniz, insieme a Newton padre fondatore di questa disciplina, a fondamento di tutto era l'*infinitesimo*, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, derivate e integrali si definivano semplicemente come rapporti o somme di infinitesimi.
La prima contestazione arrivò nel Settecento ad opera di George Berkeley filosofo empirista e vescovo anglicano che mise in luce gli aspetti contradditori degli infinitesimi definendoli *spettri di quantità estinte* (*ghosts of departed quantities)*.
Nonostante queste critiche il calcolo divenne rapidamente uno strumento irrinunciabile per i matematici ma soprattutto per fisici e ingegneri e le critiche di Berkeley restarono sullo sfondo di fatto irrisolte.
Solo nell'Ottocento il problema delle basi dell'analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy che ridefinì derivate e integrali in termini di *limiti* invece che di infinitesimi e poi di Karl Weierstrass che diede una definizione rigorosa di limite, quella nota come *epsilon-delta*.
Gli infinitesimi divenuti superflui furono cacciati dall'universo matematico; di fatto continuarono a essere usati con il nuovo nome di *differenziali*.

Il rigore di Cauchy e Weierstrass comportava però un prezzo elevato: una considerevole complicazione di buona parte delle definizioni e delle dimostrazioni dell'analisi. La definizione epsilon-delta è astrusa e di non immediata comprensione per gli studenti, le dimostrazioni vengono ad essere più complicate e oscure, per esempio le regole di derivazione della funzione composta o della funzione inversa, di dimostrazione quasi immediata usando gli infinitesimi, richiedono dimostrazioni lunghe e contorte usando l'approccio di Cauchy e Weierstrass.
Certamente di questa idea era Abraham Robinson, nostalgico degli infinitesimi di Leibniz, che tra il 1960 e il 1966 riuscì a dare un fondamento logico rigoroso a questi numeri che Berkeley aveva considerato *spettrali*.
Nel suo libro *Non-standard Analysis* Robinson scriveva[2]:

> However in spite of this shattering rebuttal, the idea of infinitely small or infinitesimal quantities seems to appeal naturally to our intuition,[3]

Robinson in realtà non era un analista ma un logico-matematico e fu proprio un teorema della logica, quello di compattezza che gli fornì lo strumento per reintrodurre con tutti gli onori gli infinitesimi (numeri non standard) nella matematica, dopo un secolo di *esilio*.
L'analisi rifondata da Robinson si basa nuovamente sugli infinitesimi, e prende il nome di *Analisi Non Standard*, in inglese *Non Standard Analisis* (NSA).
Kurt Gődel uno dei più grandi matematici del Novecento, che di Robinson era amico, nel marzo 1973 disse in un discorso a favore della NSA[4]:

> *[...]This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of Non-standard Analysis, namely the idea*

---

2 A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1966-1996, pag.2

3 D'altra parte nonostante questo rifiuto, l'idea di quantità infinitamente piccole o infinitesime sembra naturalmente attraente per la nostra intuizione.

4 A,ROBINSON, *ibidem*, pag. xvi.

> *that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that Non-standard Analysis in some version or other, will be the analysis of the future.*[5]

e subito dopo specificò così le ragioni che dovrebbero fare della NSA l'analisi del futuro.

> *One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted [...]*[6].

Sono passati quasi quarant'anni da questa profezia di Gődel e la NSA sembra ancora confinata in un Limbo, in particolar modo in Italia dove finora ha incontrato più diffidenza che altro.
Al di là delle ragioni enunciate da Gődel la NSA presenta un altro aspetto interessante e cioé che sembra particolarmente adatta ad un primo approccio all'analisi, in particolare nelle scuole secondarie; l'ambizione di questo libro è proprio quella di mostrare come questo sia possibile.

---

5 Questa situazione dovrebbe metterci al riparo dal un fraintendimento piuttosto comune dell'analisi non-standard, e cioè l'idea che si tratti di una qualche sorta di stravaganza o smania dei logici-matematici. Nulla potrebbe essere più lontano dalla verità. Piuttosto ci sono buone ragioni per credere che in una forma o in un'altra la NSA sarà l'analisi del futuro.

6 Una di queste ragioni è la già ricordata semplificazione delle dimostrazioni, dal momento che la semplificazione facilita la scoperta. Un altra, ancor più convincente ragione, è la seguente: l'Aritmetica inizia con i numeri interi e continua allargando via via il sistema dei numeri con i numeri razionali e i negativi, gli irrazionali ecc. Ma il successivo passo piuttosto naturale dopo i reali, e cioé l'introduzione degli infinitesimi, è stata semplicemente omessa

Ma è proprio necessaria l'analisi nei licei?

Nel corso degli anni si sono spesso alzate voci contro lo studio dell'analisi nei licei. Ne riporto solo due:

a) Nell'era dei computer e del calcolo numerico, è opportuno dare più peso alla matematica del discreto e meno a quella del continuo; e l'analisi è per eccellenza la matematica del continuo.
b) È inutile insegnare analisi nei licei perché in poco tempo non è possibile per lo studente comprendere a fondo concetti così difficili; gli studenti arrivano all'Università illudendosi di conoscere l'analisi quando in realtà ne hanno capito ben poco.

Il punto a) è, a mio avviso, il più valido; in effetti sarebbe necessario dare più spazio alla matematica discreta o a quella dell'incerto (probabilità e statistica); a questo punto di tempo per fare anche analisi rischia di restarne ben poco.
A mio modo di vedere il punto a) impone semmai di ridimensionare lo studio dell'analisi non di cassarlo del tutto. Una persona di cultura dovrebbe pur avere una qualche idea su derivate e integrali. In effetti l'insegnamento dell'analisi nei licei ha finito per andare ben al di là di quell'*indicare sommariamente* di cui parlava Castelnuovo. Forse sarebbe opportuno tornare a quell'obiettivo minimale.
Riguardo il punto b) si tratta di un vecchio argomento che può essere usato, ed è stato usato, per molti argomenti considerati difficili. Nella sua prefazione al volumetto "Il calcolo infinitesimale" W. W. Sawyer scrive:

> Se mi si chiedesse di scrivere su un foglio di carta tutte le proposizioni di cui sono veramente certo, quelle proposizioni che dovrebbero essere valide in ogni tempo e in ogni luogo, ebbene io restituirei quel foglio in bianco.[7]

Concetti molto simili erano già stati espressi dal già citato Guido Castelnuovo agli inizi del Novecento come risulta da questa

7 W. W. SAWYER, *Il calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna 1979, pag.11.

antologia di citazioni:

> Ciò che si sa dal professore o dall'allievo - mi fu detto - sia pur limitato, ma deve sapersi perfettamente. Orbene, io sono uno spirito mite e tollerante; ma tutte le volte che questa frase mi fu obiettata, un maligno pensiero mi ha attraversato come un lampo la mente. Oh, se potessi prendere in parola il mio interlocutore, e con magico potere riuscissi a spegnere per un istante nel suo cervello tutte le cognizioni vaghe per lasciar sussistere soltanto ciò che egli sa perfettamente! Voi non immaginate mai quale miserando spettacolo potrei presentarvi! Ammesso pure che dopo una cosi crudele mutilazione qualche barlume rimanesse ancor nel suo intelletto, e di ciò fortemente dubito, somiglierebbe questo ad un gioco di fuochi folletti sperduti in tenebre profonde e sconfinate. La verità è che noi nulla sappiamo perfettamente ... [8]

> E' questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegniamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria...[9]

> il ragionamento formalmente perfetto non è né l'unico, né, molte volte, il miglior modo per giungere alla verità. È ben spesso preferibile ricorrere ad un ragionamento approssimato, i cui passi successivi vengano sottoposti al riscontro dei fatti, per sceverare via, via il vero dal falso, piuttosto che affidarsi ad una logica impeccabile, chiudendo gli occhi al mondo esterno. Ora la matematica (come oggi si insegna nelle scuole di cultura generale) disprezza a torto quel primo tipo di procedimento logico, e condanna in tal modo l'unica forma di ragionamento che sia concessa alla maggioranza degli uomini![10]

8 EMMA CASTELNUOVO, *La didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze 1964, pag. 157.

9 EMMA CASTELNUOVO – *Didattica della matematica* – La Nuova Italia 1964 pag. 5

10 GUIDO CASTELNUOVO - *Il valore didattico della matematica e della fisica* -

Questo libro

Questo libro raccoglie, riorganizza e amplia materiale da me utilizzato per l'insegnamento dell'analisi nelle ultime due classi del liceo classico utilizzando un approccio che chiamerò *NSA-light* nel senso che ricalca l'analisi NSA ma con molti alleggerimenti.
Nel corso degli anni ho cambiato molte volte l'ordine e la collocazione dei vari argomenti dell'analisi, qui ne propongo uno, che non è necessariamente l'unico possibile.
La prima parte intitolata "Primi passi nel calcolo infinitesimale" ricalca in realtà più l'analisi di Leibniz che quella NSA, cerca di partire dagli esempi per arrivare a definizioni abbastanza rigorose, ma senza insistere troppo sul formalismo e sul rigore. Vengono introdotte sia le derivate sia gli integrali, ma solo per polinomi. Qui l'importante è abituarsi ai concetti di derivata ed integrale più che insistere su definizioni rigorose e complicazioni di calcolo. In questo modo è già possibile qualche non spregevole interazione con la Fisica. Questa è la parte svolta nel penultimo anno di corso.
La seconda parte utilizza più decisamente l'approccio NSA ed estende l'analisi anche a funzioni irrazionali, esponenziali, logaritmiche e goniometriche; alla fine vi è anche una trattazione dei limiti e di alcuni problemi correlati (asintoti).
Nel testo sono intercalati anche alcuni capitoli di analisi numerica, in particolare sul calcolo approssimato delle aree e degli integrali e sull'approssimazione polinomiale (polinomi di Taylor e Maclaurin).

Paolo Bonavoglia
Venezia, maggio 2011

«Rivista di Scienza», I, 1907 ripreso da ALDO BRIGAGLIA - *La concezione didattica di Castelnuovo* a pag. 172 del recente LIVIA GIACARDI E ALTRI – *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento della matematica in Italia.* - Agorà Publishing 2006

1 - Primi passi nel calcolo infinitesimale

In questa prima parte vediamo come e da quali problemi è nato il calcolo infinitesimale; si arriverà a saper calcolare la derivata di un polinomio, a saper determinare la tangente ad una qualsiasi curva algebrica intera in un qualsiasi punto, e a saper trovare i punti stazionari (massimi, minimi, flessi) di una curva algebrica.

1.1 Il problema della tangente

René Descartes (Cartesio) all'inizio del seicento rivoluzionò la matematica mostrando come la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche. Fino allora calcolo e geometria erano stati rami ben distinti della matematica, quello della geometria essendo il regno delle dimostrazioni e della logica; Cartesio mostrò che anche la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo; da questa idea nasce la geometria analitica.
Il metodo algebrico si dimostrò molto potente per risolvere tanti problemi, per esempio l'intersezione tra due curve si riduce a un sistema di equazioni, l'interpolazione della curva per n punti si riduce ugualmente a un sistema di equazioni.
Molto più difficile si rivelò il problema di trovare l'equazione della tangente a una curva e ancor più quello di trovare un metodo generale per questo problema.
La tangente è la retta che *tocca* una curva in un solo punto senza attraversarla, o meglio è la retta che ha la stessa direzione (coefficiente angolare) della curva in un dato punto (la seconda definizione è preferibile perché comprende anche i punti di flesso).
Furono escogitati diversi metodi, tutti piuttosto macchinosi e laboriosi. I più generali furono quelli dell'inglese Barrow e del francese Sluse che diedero regole empiriche per trovare la tangente di una qualsiasi curva algebrica piana, della forma P(x,

y) = 0, dove P(x, y) è un polinomio nelle due variabili x e y.
I metodi di Barrow e Sluse implicavano già l'uso di quantità infinitamente piccole o *infinitesimi*. L'idea era che la tangente è quella retta che ha in comune con la curva due punti infinitamente vicini, tali cioè che la loro distanza sia infinitesima.
Come vedremo più avanti la soluzione più generale viene trovata da Leibniz che considera il coefficiente angolare *m* della tangente a una curva come il quoziente tra gli incrementi infinitesimi della *y* e della x, in simboli:

$$m=\frac{dy}{dx}$$

1.2 Il problema della velocità istantanea

L'altro grande problema che fu alla base del calcolo infinitesimale è quello della velocità istantanea.
Prendiamo come esempio la corsa dei 100 metri piani; un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di 100/10 = 10 m/sec (metri al secondo).
Ma questa è appunto una media; per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo. In formule:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove appunto Δs sta per spazio percorso e Δt sta per tempo impiegato a percorrerlo.
In questo caso è: $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{100}{10}=10\,m/s$

In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità. Rappresentando la sua corsa in un grafico tempo-spazio ci si può fare un'idea dell'andamento della corsa. Nel disegno a lato sono rappresentati i moti di due atleti *A* (rosso) e *B* (verde). Vediamo che *A* è partito lentamente poi ha accelerato progressivamente fino al traguardo; *B* è partito più veloce e poi ha rallentato sempre più. Alla fine A e B sono arrivati a pari merito, dunque la loro velocità media risulta la stessa, mentre la velocità istantanea è diversa.

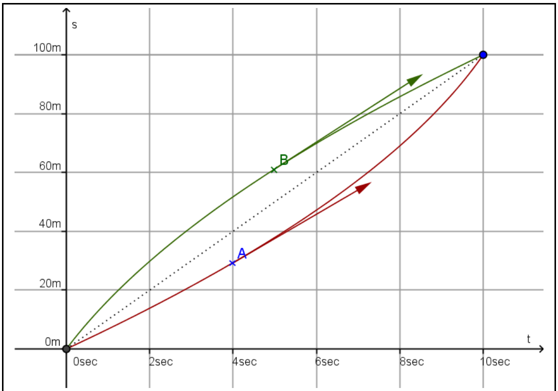
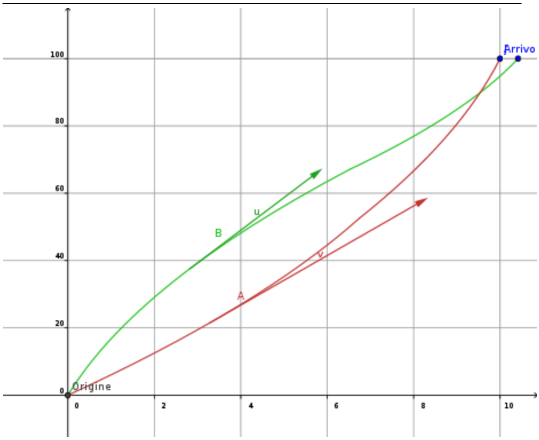


Grafico tempo spazio di una corsa dei 100 m piani; A e B sono i due atleti in gara.

Nel diagramma a lato una variante; qui B è partito a grande velocità, mentre A è partito più lento, ma alla fine A accelera e B rallenta e A arriva al traguardo per primo. Il punto di incrocio tra le due curve rappresenta ovviamente il momento del *sorpasso* di A su B; in quel momento A e B sono nella stessa posizione. A e B



Un altro esempio di gara dei 100 m piani.

hanno la stessa velocità solo verso metà gara quando le tangenti alle due curva sono parallele.
Il problema è: si può calcolare la velocità dell'atleta istante per istante? Che cosa vuol dire esattamente *istante*? Se ammettiamo che un istante corrisponda a un intervallo di tempo nullo, e quindi che in un tempo nullo sia stato percorso un tempo nullo, abbiamo $\Delta\tau = 0$ e $\Delta s = 0$ e quindi la velocità istantanea varrebbe $v = 0/0$ che è una frazione indeterminata e quindi indefinita; è la versione in termini moderni del 3º paradosso di Zenone, quello della freccia.
In altre parole il concetto di velocità istantanea sembra irrimediabilmente intrattabile.
Per superare questa situazione, Leibniz e, in modo equivalente, Newton introdussero il concetto di *infinitesimo*: l'istante di tempo è visto non più come un tempo nullo ma come un tempo infinitamente piccolo o *infinitesimo dt* (leggi *de-ti*) e analogamente lo spazio percorso come uno spazio infinitesimo *ds* (leggi *de-esse*). La velocità istantanea è allora data dal quoziente *ds/dt*, che si chiamerà *derivata* dello spazio rispetto al tempo.[11]

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Questa soluzione può sembrare artificiosa ma fu sufficiente a costruire un nuovo tipo di calcolo, il calcolo infinitesimale, che ebbe uno straordinario successo fino a divenire strumento di lavoro fondamentale per fisici e ingegneri.
Un'altra soluzione possibile è quella di cercare di approssimare la velocità istantanea misurando la velocità media su intervalli di tempo sempre più piccoli.
Per esempio per misurare la velocità istantanea dell'atleta A al 50° metro, si potrebbe riprendere la corsa con una telecamera ad alta velocità e fare le seguenti misure sui fotogrammi prendendo intervalli di tempo sempre più brevi:

11 Newton usò termini e simboli diversi; per lui la variabile dipendente (qui la posizione indicata per esempio con $\boldsymbol{z}$) si chiama *fluente*, le derivata si chiama *flussione* e si indica con $\dot{\boldsymbol{z}}$

Tempo tra	4-6 2 sec	4,5-5,5 1 sec	4,9-5,1 0,2 sec		...
Spazio percorso	21 m	10,3 m	2,08 m		...
Velocità s/t	10,5 m/s	10,3 m/s	10,4 m/s		...

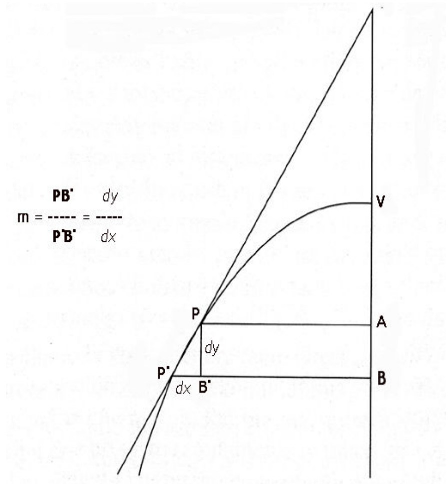
Ma nella pratica ci sono alcuni problemi: 1) arrivati all'intervallo di tempo minimo della telecamera, ci si deve fermare; non avremo la velocità istantanea ma solo una velocità media su un tempo molto breve; solo un'approssimazione della velocità istantanea; 2) mano a mano che spazi e tempi diventano più piccoli, diventa sempre più grande l'errore percentuale commesso nella misura e quindi anche nel calcolo della velocità, che sarà tanto meno precisa tanto più piccoli sono gli intervalli di tempo.
In teoria però questa idea seppure praticamente irrealizzabile porta a definire la velocità istantanea come il *limite* al quale tende la velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero.
Su questa definizione di velocità istantanea e quindi matematicamente di derivata, si basa la riformulazione dell'analisi fatta da Cauchy e Weierstrass nell'Ottocento.
Questo libro come detto nell'introduzione segue viceversa l'idea di Leibniz e Newton, ripresa nel Novecento da Robinson che abbia senso parlare di quantità infinitamente piccole o infinitesimi.

2 - PRIMI PASSI TRA LE DERIVATE

2.1 Infinitesimi e derivate

La soluzione più generale del problema della tangente (e quindi anche della velocità istantanea) è quella dovuta a Leibniz che per questo introduce due concetti nuovi, quello di infinitesimo (o quantità infinitamente piccola) e quello di derivata. Contemporaneamente a Leibniz, Isaac Newton sviluppò un metodo del tutto equivalente basato sui concetti di *fluente* e di *flussione*. Poiché nella matematica si è imposta la notazione di Leibniz, è a questa che faremo riferimento d'ora in poi.

L'idea di fondo è quella di vedere la tangente non più come la retta che *tocca* una curva in un solo punto, ma come la retta che passa per due punti *infinitamente vicini*. In questo modo la tangente viene ad essere simile alla secante; entrambe intersecano la curva in due punti, per la secante si tratta di due punti a distanza finita, per la tangente di due punti a distanza infinitesima.



Il problema della tangente affrontato da Leibniz

Ma cosa vuol dire distanza *infinitesima* o numero *infinitesimo*? Per Leibniz si tratta di un numero diverso da zero e al tempo stesso minore di ogni numero reale 1/N.

Ma tra i numeri reali non esiste alcun numero con queste caratteristiche; Leibniz quindi di fatto introduce un nuovo

insieme di numeri, i numeri *infinitesimi* appunto.
La definizione può apparire strana ma di fatto questi nuovi numeri permettono di risolvere il problema della tangente in un modo del tutto generale.
Nel disegno accanto, tratto dall'originale di Leibniz dove la distanza infinitamente piccola tra i due punti della curva **P** e **P'** è stata ingrandita fino a renderla visibile, il coefficiente angolare *m* della tangente è dato dal rapporto tra i segmenti **PB'** e **P'B'** che corrispondono agli incrementi infinitesimi *dy* e *dx*.
Questo rapporto è di fatto una funzione della *x*, poiché assume un valore diverso per ogni valore della *x* e prende il nome di derivata della funzione, in simboli:

$$m=\frac{dy}{dx}$$

Questa definizione può sembrare a prima vista inutile, ma con la semplice ipotesi che per gli infinitesimi valgano le ordinarie regole dell'algebra, è possibile calcolare *m* per ogni funzione algebrica.
In altre parole la derivazione è un'operazione che trasforma una funzione in un'altra funzione. La prima si chiama funzione *primitiva*, la seconda funzione derivata o brevemente *derivata*.
Leibniz oltre a definire regole del tutto generali per calcolare la derivata di una funzione fu in effetti il primo ad usare la parola *funzione* in un senso molto vicino a quello moderno e il simbolo *f(x)* per indicare una qualsiasi funzione..
Con Leibniz nasceva così un nuovo tipo di calcolo che si chiamò *calcolo infinitesimale;* in seguito lo stesso calcolo ebbe i nomi di *calcolo sublime* e poi di *analisi infinitesimale* e di *analisi matematica*.

2.2 *Parte standard*

Riassumendo le idee di Leibniz:

1.Si ammette l'esistenza di un nuovo insieme di numeri *infinitamente piccoli*, detti *infinitesimi*[12] indicati con i simboli *dx*, *dy* … Tali numeri sono diversi da zero ma minori di ogni numero reale per quanto piccolo sia; in simboli:

$$0 < dx < \frac{1}{N}$$

dove N è un numero intero grande quanto si vuole;

2.Due numeri che differiscono per un infinitesimo si dicono *infinitamente vicini*; per indicare questa relazione si usa il simbolo ≈ e si scriverà per esempio

$$2x + dx \simeq 2x$$

3.***Principio di estensione***: si ammette che ai numeri infinitesimi si estendano le ordinarie regole dell'algebra.

È utile aggiungere una definizione che è in realtà molto posteriore a Leibniz[13] e cioè quella di numero iperreale.

La somma di un numero reale e di un infinitesimo si chiama numero iperreale; il primo numero si chiama parte reale (o standard) del numero iperreale, la seconda parte infinitesima; sono esempi di numeri iperreali:

Numero iperreale	Parte reale	Parte infinitesima
$2-dx$	2	$-dx$
$3dx$	0	$3dx$
5	5	0

Si definisce poi per i numeri iperreali una semplicissima ma utile

12 Per i *dx* si usa anche il termine *differenziali*, trattandosi di differenze infinitamente piccole. Di qui i nomi *calcolo differenziale*, *equazione differenziale*.

13 La definizione di numero iperreale è dovuta ad Abraham Robinson che nel 1960 riformulò su basi più rigorose il calcolo degli infinitesimi.

funzione detta *parte standard*, simboleggiata in *st(_)*, che restituisce la parte reale (o standard appunto) del numero; per esempio:

Numero iperreale	Parte standard
2-dx	*st(2-dx) = 2*
3dx	*st(3dx) = 0*
5	*st(5) = 5*
a + b.dx	*st(a+b.dx) = a*

2.3 Un primo esempio: la derivata del quadrato

Per introdurre il concetto di derivata prendiamo la funzione $y = x^2$ (graficamente si tratta di una parabola con vertice nell'origine) e cerchiamo la tangente nel punto A(1;1).

Prendiamo ora il punto A' infinitamente vicino ad A e cioé con coordinate (*1+dx; 1+dy*):

$$1+dy=(1+dx)^2$$

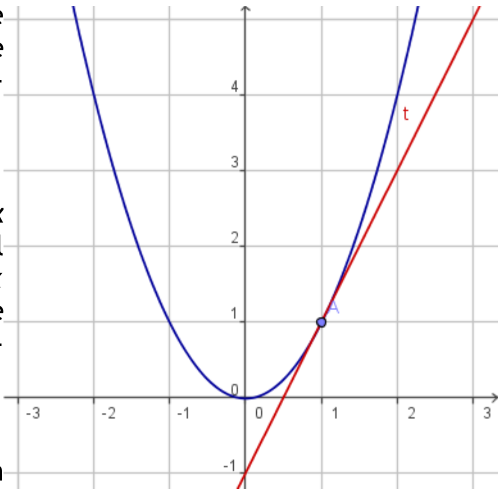
Svolgendo i calcoli con le ordinarie regole dell'algebra (qui: quadrato del binomio):

$$1+dy=1+2dx+dx^2$$

$$dy=2\,dx+dx^2$$

e dividendo tutto per *dx* allo scopo di calcolare il quoziente *dy/dx* ovverosia il coefficiente angolare m della tangente:

$$m=\frac{dy}{dx}=2+dx$$

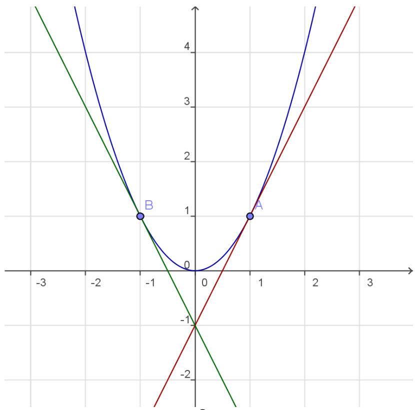


Ma *m* deve essere un

numero reale e quindi ci interessa solo la parte standard del risultato, ovverosia va scartata la parte infinitesima *dx*.
Questa dello scartare la parte infinitesima dal risultato è una regola che applicheremo sempre nel calcolo delle derivate.
Dunque il coefficiente angolare della tangente in ***A*** vale 2 e l'equazione della tangente viene ad essere, sostituendo 2 nella classica equazione del fascio di rette in ***A***:

$$y-1=2(x-1)$$
$$y=2x-2+1$$
$$y=2x-1$$

Questo metodo appare già di per sé più snello e diretto dei metodi algebrici, come quello del delta.
Ma i vantaggi del metodo delle derivate sono ancora maggiori.



La parabola y = x^2 e due tangenti

Il metodo si può infatti generalizzare facilmente a un qualsiasi punto *P(x; y)*; basta considerare come prima il punto *P'(x+dx;y+dy)* infinitamente vicino a ***P***:

$$y=x^2$$
$$y+dy=(x+dx)^2$$

Come sopra calcoliamo il quadrato del binomio:

$$y+dy=x^2+2x\,dx+dx^2$$

Ma ricordando che è $y = x^2$, possiamo eliminare i primi termini dei due membri dell'equazione, ottenendo:

$$dy=2x\,dx+dx^2$$

A questo punto per ottenere la derivata *dy/dx*, è sufficiente dividere tutto per *dx*, ottenendo:

$$\frac{dy}{dx}=2x+dx$$

Eliminando come sopra l'infinitesimo *dx* si conclude che il coefficiente angolare è:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{d\,x^2}{dx}=2\,x$$

La novità rispetto al caso precedente è che qui otteniamo *m* come una *funzione* di *x*; funzione che ci dice che il coefficiente *m* è sempre il doppio della x; possiamo quindi calcolare *m* per qualsiasi valore della *x*.
Per esempio per il punto B(-1; 1) otteniamo subito *m* = -2 (vedi grafico precedente).
Dalla funzione di partenza $y = x^2$ abbiamo *derivato* la nuova funzione y = 2x.
Tale funzione si chiama *funzione derivata* o brevemente *derivata*. La funzione di partenza è detta *funzione primitiva*.[14]
Per indicare la derivata si usano anche altre notazioni dovute a matematici dei secoli successivi; le riassumiamo qui di seguito con riferimento alla funzione appena studiata:

Nome	Simbolo di derivata	Esempio $y = x^2$
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dx^2}{dx}=2\,x$
Eulero	$D_x f(x)$	$D_x x^2=2\,x$
Lagrange	$y' \quad f'(x)$	$y'=f'(x)=2\,x$
Cauchy	$D f(x)$	$D x^2=2\,x$
Newton	$\dot{y}$	$\dot{y}=2\,x$

Come si vede dal prospetto precedente il simbolo introdotto da Leibniz per la derivata (quoziente di infinitesimi) non è l'unico usato in matematica; il simbolo di Lagrange è oggi di gran lunga il più usato oggi; quello di Cauchy è usato soprattutto per le regole di derivazione.

14 Isaac Newton sin dal 1666 aveva elaborato un metodo del tutto simile a quello di Leibniz nel quale la primitiva era detta *fluente* e indicata con una lettera p.es. *y* la derivata era detta *flussione* e indicata con la stessa lettera con un punto sopra.

2.3.a Riassumendo

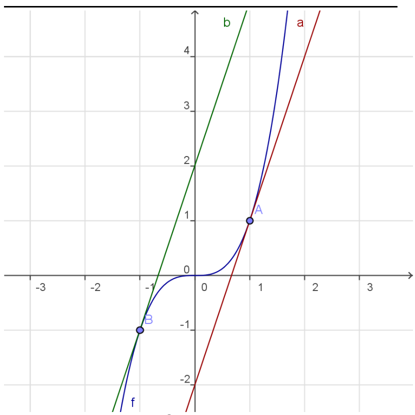
Riassumendo il metodo di Leibniz per calcolare una derivata può così riassumersi:

1. Incrementare sia la *x (variabile indipendente)* sia la *y (variabile dipendente*) di un infinitesimo (rispettivamente *dx* e *dy*).
2. Semplificare l'espressione che si è ottenuta, applicando anche agli infinitesimi le ordinarie regole dell'algebra, e calcolare il quoziente *dy*/*dx*.
3. A questo punto scartare gli infinitesimi eventualmente rimasti, e considerare solo la parte reale del risultato; questa parte reale è la derivata della funzione.

La derivata di una funzione y = f(x) è la parte reale (o parte standard) del quoziente $\frac{dy}{dx}$

2.4 Derivata di potenze superiori

Un altro esempio di calcolo della derivata è quello della funzione *y* = *x*^{3} *(parabola cubica)*



La cubica y = x^3 *e due tangenti*

$$y = x^3$$
$$y + dy = (x + dx)^3$$

Iniziamo calcolando il cubo del binomio secondo la ben nota regola dell'algebra:

$$\cancel{y} + dy = \cancel{x^3} + 3x^2 dx + 3x\,dx^2 + dx^2$$

(L'eliminazione di y e x^3 *è giustificata dal fatto che y = x*^{3}*)*

$$dy = 3x^2 dx + 3x\,dx^2 + dx^3$$

Ora per ottenere la derivata *dy/dx*, è sufficiente dividere tutto per *dx*, ottenendo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + dx^2 \approx 3x^2$$

Eliminando gli infinitesimi, si conclude che la derivata di *y* = x^3 è:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,x^3}{d\,x} = 3\,x^2$$

In modo del tutto analogo, ricordando la regola per il calcolo della potenza del binomio, si calcolano le derivate delle potenze successive:

$$D_x x^3 = 3x^2$$
$$D_x x^4 = 4x^3$$
$$D_x x^5 = 5x^4$$
$$\ldots$$

In questo specchietto si è usata la notazione di Cauchy per le derivate, meno ingombrante di quella di Leibniz: si scrive una D maiuscola seguita dall'espressione che rappresenta la funzione.

2.5 La derivata della potenza

A questo punto è facile generalizzare una regola per la potenza con esponente qualsiasi:

$$D x^n = n x^{n-1}$$

che è un primo esempio di *regola di derivazione*, la *regola di derivazione della potenza.*

Infatti generalizzando il procedimento precedente si ha, ricordando la potenza del binomio (triangolo di Tartaglia)[15]:

$$y + dy = x^n + n x^{n-1} dx + C_{n,2} x^{n-2} dx^2 + \ldots + dx^n$$
$$dy = n x^{n-1} dx + C_{n,2} x^{n-2} dx^2 + \ldots + dx^n$$

dividendo poi tutto per dx e scartando la parte infinitesima:

15 $C_{n,2}$ è il numero del triangolo di Tartaglia alla riga *n*, colonna 2, cominciando la numerazione da 0.

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1} + C_{n,2}\,x^{n-2}\,dx + \ldots$$
$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

che è appunto la regola di derivazione della potenza.
Questa regola ci permette di calcolare la derivata di una qualsiasi potenza di *x* senza dover ogni volta ripartire dalla definizione di derivata.
Si noti che la regola funziona anche nel caso banale della derivata della potenza di primo grado:

$$y = x$$
$$y + dy = x + dx$$

da cui segue:

$$y + dy = x + dx$$
$$dy = dx$$
$$\frac{dy}{dx} = 1$$

risultato che coincide con la regola generale

$$D_x x^1 = 1\,x^0 = 1$$

Che la derivata di *y* = *x* sia 1 discende anche dalla definizione stessa di derivata. La retta *y* = *x* ha pendenza costante di 45° e coefficiente angolare pari a 1. Ovviamente bisogna intendere che la tangente a una retta sia la retta stessa.
E la regola funziona anche nell'altro caso banale, quello della derivata della potenza con esponente zero, in altre parole della costante 1. La derivata è zero

$$y = 1$$
$$y + dy = 1$$
$$dy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = 0$$
$$D\,x^0 = 0\,x^{-1} = 0$$

Che la derivata di una costante sia zero discende anche dalla definizione stessa di derivata. Se la funzione è costante: *y* = *k* allora geometricamente rappresenta una retta orizzontale, e questa ha coefficiente angolare costantemente nullo.

2.6 La derivata è un'operazione lineare

Una proprietà della derivata è che la derivata della somma di due funzioni è la somma delle derivate delle due funzioni. Come esempio calcoliamo la derivata di $y = x^3 + x^2$:

$$y=x^3+x^2$$
$$y+dy=(x+dx)^3+(x+dx)^2$$

da cui segue:

$$y+dy=x^3+3x^2dx+...+x^2+2x\,dx$$
$$dy=3x^2dx+...+2x\,dx+...$$
$$\frac{dy}{dx}=3x^2+2x$$

In generale si ha allora:

$$D\,f(x)+g(x)=D\,f(x)+D\,g(x)$$

Una seconda proprietà è che la derivata del prodotto di una costante per una funzione è il prodotto della costante per la derivata della funzione. In altre parole un fattore costante si può portar fuori dall'operazione di derivata. Come esempio calcoliamo la derivata di $y = 3.x^2$:

$$y=3x^2$$
$$y+dy=3(x+dx)^2$$
$$y+dy=3(x^2+2x\,dx+dx^2)$$
$$y+dy=3x^2+6x\,dx+3\,dx^2$$
$$dy=6x\,dx+3\,dx^2$$
$$\frac{dy}{dx}=6x+3\,dx$$
$$\frac{dy}{dx}=6x$$

La derivata è quindi tre volte la derivata di x^2, e cioè

$$D3x^2=3Dx^2=3(2x)=6x$$

e più in generale:

$$D\,k\,f(x)=k\,D\,f(x)$$

Queste due proprietà sono dette proprietà lineari e si riassumono dicendo che la derivata è un *operatore lineare*.
Riassumendo le proprietà lineari della derivata:

$$D f(x)+g(x)=D f(x)+D g(x)$$
$$D k f(x)=k D f(x)$$

Si noti che non tutte le operazioni matematiche sono lineari: non lo è per esempio il quadrato di un binomio (il quadrato di un binomio non è la somma dei quadrati, c'è anche il doppio prodotto); anche il radicale di una somma non è la somma dei radicali.

2.7 La derivata di un polinomio

Usando le proprietà lineari e la regola per la derivata della potenza, è facile calcolare la derivata di un qualsiasi polinomio, senza dover più far ricorso al metodo visto finora.
In pratica poiché un polinomio è sempre la somma di più termini, basterà calcolare la derivata di ognuno di questi e poi sommare. Ognuno di questi termini poi è sempre il prodotto di un fattore costante (il coefficiente) per una potenza e quindi basterà moltiplicare il fattore costante per la derivata della potenza.
In pratica derivare un polinomio è cosa più facile a farsi che a descriversi. Vediamo un esempio:

$$y=2x^3+5x^2-2x+1$$
$$y'=2(3.x^2)+5(2x)-2(1)+0$$
$$y'=6x^2+10x-2$$

Si noti che la derivata di un polinomio è ancora un polinomio, ma di grado diminuito di 1.

2.8 La derivata del prodotto di funzioni

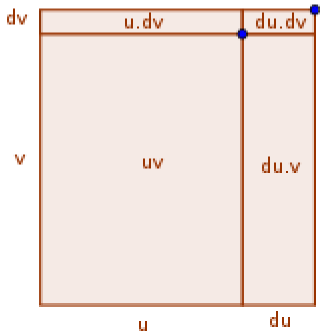
Si potrebbe pensare che così come la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate, anche la derivata del prodotto sia uguale al prodotto delle derivate.
Basta un semplice controesempio per convincersi che non è così; supponiamo infatti di avere le due funzioni

$$f(x)=x^2 ; g(x)=3x$$

le loro derivate sono

$$f'(x)=2x ; g'(x)=3$$

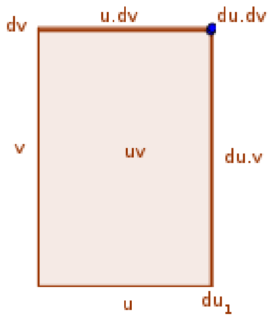
Ora il prodotto delle derivate è $6x$
Ma il prodotto delle funzioni è $3x^3$, la cui derivata è $9x^2$, niente a che fare con $6x$.
Dunque la derivata del prodotto di due funzioni NON è il prodotto delle derivate.



Incremento del prodotto

Occorre una regola più complessa che fu trovata da Leibniz nel 1675 e che per questo motivo si chiama *regola di Leibniz*.
In generale se abbiamo una funzione che è il prodotto di due funzioni $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e quindi si può scrivere $y = uv$, si può procedere come segue, incrementando di un infinitesimo tutte le variabili:

$$y=uv$$
$$y+dy=(u+du)(v+dv)$$
$$\cancel{y}+dy=\cancel{uv}+u\,dv+du\,v+du\,dv$$
$$dy=u\,dv+du\,v+du\,dv$$
$$dy=du\,v+dv\,u+du\,dv$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u+\frac{du\,dv}{dx}$$



Prodotto con incrementi infinitesimi

ma l'ultimo termine è infinitesimo e quindi va scartato, ricavando la regola di Leibniz che può scriversi:

$$D_x uv = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}$$

Una rappresentazione efficace di questo risultato si ha nel disegno precedente: il prodotto *uv* è rappresentato da un rettangolo; incrementando i due lati del rettangolo indipendentemente si vede che l'incremento è dato da $d\,uv = du\,v + u\,dv + du\,dv$ dove l'ultimo termine è un infinitesimo del secondo ordine (di secondo grado) ed è quindi trascurabile rispetto ai primi due termini. Va naturalmente ricordato che *du* e *dv* sono due numeri infinitamente piccoli e sono qui rappresentati con segmenti finiti per rendere leggibile il disegno; un disegno più corretto sarebbe dunque il secondo, dove il prodotto *du.dv* si riduce a un punto.

Usando la notazione di Lagrange la regola assume la forma più compatta:

$$y' = u'v + uv'$$

e usando il simbolo di funzione:

$$D f(x) g(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

si ottiene la forma più consueta per questa regola.

In conclusione:

La derivata del prodotto di due funzioni è la somma del prodotto della prima funzione per la derivata della seconda più il prodotto della seconda funzione per la derivata della prima.

Esempio:

Prendiamo la funzione:

$y = (2x^3 - x)(3x + 1)$

Applicando la regola appena vista, le derivate dei due fattori sono ($6x^2$ – 1) e 3, e dunque la derivata è:

$$y' = (2x^3 - x)3 + (6x^2 - 1)(3x + 1) =$$
$$6x^3 - 3x + 18x^3 + 6x^2 - 3x - 1 =$$
$$24x^3 + 6x^2 - 6x - 1$$

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando prima il prodotto dei due polinomi:

$$y=(2x^3-x)(3x+1)=6x^4+2x^3-3x^2-x$$

e la derivata è:

$$y'=24x^3+6x^2-6x-1$$

in perfetto accordo con il risultato ottenuto con la regola di Leibniz.

Esercizi:
Calcolate la derivata dei seguenti prodotti in due modi: usando la regola di Leibniz e calcolando il prodotto di polinomi e quindi la derivata del polinomio ottenuto.

1. *y = (x + 1)(2x – 1)*
2. *y = (x² – 4x + 4)(3x + 2)*

2.9 La derivata della funzione composta

Consideriamo come esempio la funzione

$$y = (3x-1)^2$$

che si può vedere come *funzione composta* di due funzioni elementari il polinomio *3x - 1* e il quadrato; la funzione si può allora scomporre nel modo seguente, utilizzando la variabile di comodo *t*

$$y=t^2$$
$$t=3x-1$$

La derivata può trovarsi svolgendo il quadrato del binomio e quindi derivando il polinomio così ottenuto:

$$y=(3x-1)^2=9x^2-6x+1$$
$$y'=18x-6=6(3x-1)$$

Abbiamo ottenuto il polinomio *3x -1* moltiplicato per *6*.
Consideriamo le derivate delle funzioni elementari:

$$y'=\frac{dy}{dt}=2t\,;\,t'=\frac{dt}{dx}=3$$

Ma il prodotto di queste due derivate è 6t, e poiché t=3x-1, la derivata risulta essere il prodotto delle derivate.
É un caso o una regola generale?

Applicando anche agli infinitesimi le ordinarie regole dell'algebra (qui la semplificazione in croce di *dt*):

$$\frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

dunque la regola è generale, data una funzione composta $y = f(g(x))$ che può scomporsi in:

$$y = f(g(x))$$
$$y = f(t) t = g(x)$$

si ha la regola

La derivata di una funzione composta da due funzioni elementari è il prodotto delle derivate di queste.

Una funzione composta si può anche scrivere ***y*** = ***f(g(x))***, dove:

$$y = f(t)$$
$$t = g(x)$$

Esempi:

1. Derivare $y = (x-1)^2$; la funzione si scompone in $\begin{matrix} y = t^2 \\ t = x-1 \end{matrix}$ e le derivate sono $\begin{matrix} y' = 2\text{t} \\ t = 1 \end{matrix}$
   e quindi si calcola la derivata come prodotto di queste ultime:
   $y' = 1.2t = 2(x-1)$
2. Derivare $y = (3x^2+1)^3$ che si scompone in $\begin{matrix} y = t^3 \\ t = 3x^2+1 \end{matrix}$ e le derivate sono $\begin{matrix} y' = 3\text{t}^2 \\ t' = 6x \end{matrix}$
   e quindi la derivata è:
   $y' = 6x\,3t^2 = 18x(3x^2+1)^2$

2.10 Le derivate successive

La derivata di una funzione è a sua volta una funzione, dunque è possibile calcolare la derivata della derivata ottenendo quella che si chiama la *derivata seconda*. La cosa può andare avanti all'infinito ottenendo una derivata terza, una derivata quarta e così via.

Per esempio la funzione polinomiale $y = 3x^3 + x^2 - 3x + 1$ ha le seguenti derivate successive:

$$\begin{aligned} &y=3x^3+x^2-3x+1 \\ &y'=9x^2+2x-3 \\ &y''=18x+2 \\ &y^{iii}=18 \\ &y^{iv}=0 \end{aligned}$$

Appare evidente che la derivata di ordine *(n+1)* di un polinomio di grado *n* è sempre nulla e così ovviamente tutte le derivate successive. In simboli:

$$D_x^{n+1} P_n(x)=0$$

Anche per indicare le derivate successive esistono diverse notazioni:

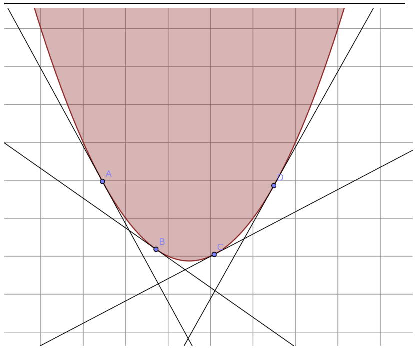
Leibniz	$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$
Eulero	$D_x f(x), D_x^2 f(x), D_x^3 f(x) \ldots$
Lagrange	$f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots$
Cauchy	$D f(x), D^2 f(x), D^3 f(x) \ldots$
Newton	$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y},$

2.11 Significato geometrico della derivata seconda

Si è visto sin dall'inizio che la derivata prima ha il significato geometrico di tangente, o meglio di coefficiente ango-lare della tangente.

È ora naturale chiedersi se la derivata seconda abbia an-ch'essa un significato geome-trico.

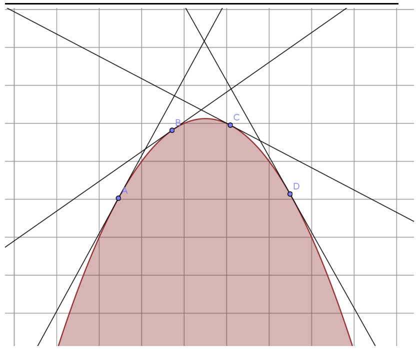
La risposta è positiva: innan-zitutto va ribadito che la derivata seconda è la derivata della derivata, e quindi misura l'incremento della derivata prima.



Incremento della pendenza delle tangenti, quindi derivata seconda positiva, quindi concavità verso l'alto.

Osservando il primo grafico a destra si vede che il coef-ficiente angolare delle tan-genti alla curva, andando naturalmente da sinistra a destra, è inizialmente molto negativo, poi aumenta sempre più fino a diventare positivo nella parte destra della curva. Dunque la derivata seconda è positiva.

È facile convincersi che questo equivale a dire che la con-cavità della curva è verso l'alto.



Qui invece la pendenza delle tangenti diminuisce, quindi derivata seconda negativa, quindi concavità verso il basso.

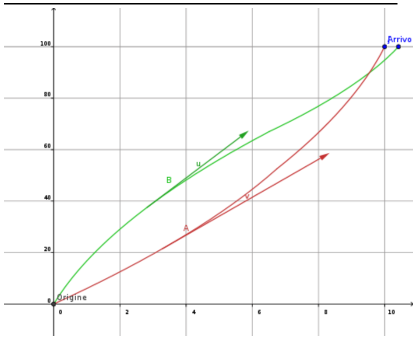
Osservando ora il secondo disegno si osserva una situa-zione rovesciata; qui le tangenti partendo da sinistra hanno coefficiente angolare molto positivo, che andando verso destra diminuisce; dunque la derivata seconda è negativa.

È facile convincersi che questo equivale a dire che la concavità della curva è verso il basso.

Ecco dunque il significato della derivata seconda: concavità della curva.
E se la derivata è nulla? In questo caso la pendenza della tangente non aumenta e non diminuisce, detto in altro modo si mantiene costante,
Dunque derivata seconda nulla vuol dire andamento rettili-neo. Del resto è ovvio che una retta che ha equazione di primo grado avrà sempre derivata seconda nulla.

2.12 *Significato fisico della derivata seconda.*

Torniamo sul diagramma orario della corsa dei 100 m piani, riportato qui accanto: l'atleta verde parte veloce poi rallenta e accelera di nuovo in vista del traguardo; l'atleta rosso invece parte lentamente poi accelera sempre più fino a superare l'atleta verde ed a vincere la gara.



La corsa dei 100 m piani

Osservando il disegno appare chiaro che quando l'atleta accelera (aumenta la velocità) la curva ha la concavità verso l'alto, quando rallenta la curva ha la concavità verso l'alto.
Dunque dal punto di vista fisico il significato della derivata seconda è quello di accelerazione intesa come aumento di velocità.[16]
Matematicamente se si conosce l'equazione del moto di un corpo $y=f(t)$ allora la velocità istantanea sarà data dalla derivata prima $y=f'(t)$ e l'accelerazione istantanea dalla derivata seconda $y=f''(t)$.

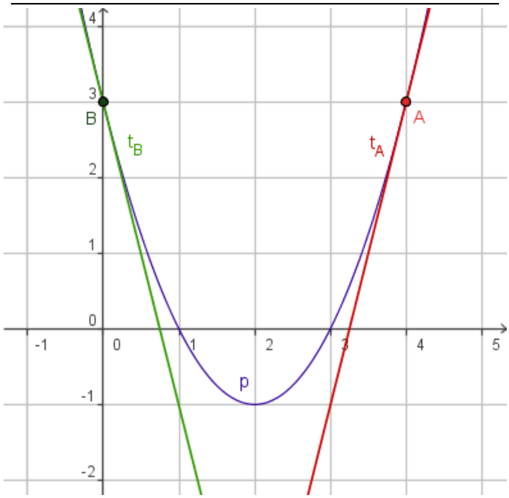
16 Questo naturalmente se facciamo riferimento alla posizione come variabile dipendente; se ci si riferisce ad altre grandezze fisiche il significato fisico della derivata seconda sarà diverso.

3 - Trovare la tangente a una curva

Come si è detto infinitesimi e derivate sono nati anche e soprattutto per risolvere il problema della tangente a un curva. Per le curve di secondo grado, le coniche, erano stati già trovati metodi algebrici più o meno complicati.
Vediamo ora come con l'uso della derivata diventa molto semplice trovare la tangente a una qualsiasi curva in un qualsiasi suo punto, facendo ricorso a due esempi.

3.1 Tangenti a una parabola

Il primo problema è quello di trovare l'equazione della tangente alla parabola $y = x^2 - 4x + 3$ in un suo punto qualsiasi. Qui prenderemo come esempio i punti A(4;3) e B(0;3).
Algebricamente il problema si può risolvere o imponendo che il delta del sistema sia uguale a zero o con il metodo della traslazione; entrambi i metodo richiedono una mole di calcoli che può essere notevole.
Il calcolo infinitesimale permette di trovare la tangente in modo molto più semplice è spedito; vediamolo per il punto B(4;3).



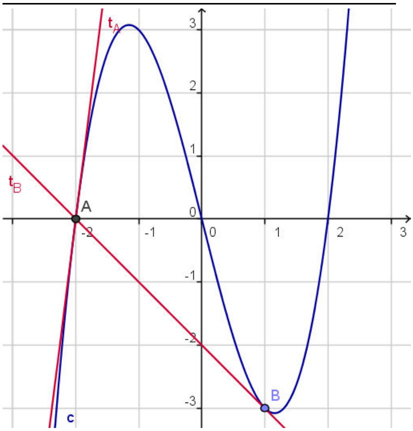
Tangenti alla parabola

1.Per prima cosa si calcola la derivata della funzione $y = x^2 - 4x + 3$ che è $y' = 2x - 4$
2.Si calcola con la derivata il coefficiente angolare in B; essendo

in B *x* = *4*, il coefficiente angolare vale *2.4 - 4* = *+4*.
3.Sostituiamo il valore di m nell'equazione del fascio di rette in B: *y - 3* = *m(x - 4)*. Questa è l'equazione della tangente: y - 3 = 4(x - 4), che semplificando diviene y = 4x - 16 + 3 e quindi y = 4x – 13 o in forma implicita: *- 4x* + *y* = *- 13*
Si provi come esercizio a ripetere il procedimento per A(0,3) *(la tangente in questo caso sarà: y = -4x +3)*.

3.2 Tangenti a una parabola cubica

Il problema è ora quello di trovare l'equazione della tangente alla cubica $y = x^3 - 4x$ in un suo punto qualsiasi. Qui per esempio calcoleremmo la tangente nei punti A(1;−3) e B(−2;0).
Il metodo algebrico valido per le curve di secondo grado (delta) non è ovviamente più applicabile; sarebbe ancora utilizzabile il metodo della traslazione, dato che anche per le cubiche vale la regola che nel punto di intersezione con l'asse delle y, l'equazione della tangente è semplicemente l'equazione della cubica dalla quale si siano cancellati i termini di grado superiore al primo; ma il metodo è molto laborioso.



Tangenti a una cubica

Il calcolo infinitesimale permette invece di trovare la tangente in modo molto più semplice è spedito, del tutto analogo a quello visto per la parabola; vediamolo per il punto B(4;3).

1.Per prima cosa si calcola la derivata della funzione $y=x^3-4x$ che è $y' = 3x^2 - 4$
2.Si calcola con la derivata il coefficiente angolare in B; essendo

in B x = 1, il coefficiente angolare vale 3.1 − 4 = −1.
3.Sostituiamo il valore di m nell'equazione del fascio di rette in B: y + 3 = m(x − 1). Questa è l'equazione della tangente: y + 3 = −1(x − 1), che semplificando diviene y = −x + 1 − 3 e quindi y = −x − 2
Si provi come esercizio a ripetere il procedimento per A(−2,0) *(la tangente in questo caso sarà: y = 8x + 16).*

3.2.a Metodo generale per trovare le tangenti a una curva.

I due esempi precedenti definiscono un metodo del tutto generale per trovare l'equazione della tangente a una curva di equazione *y = f(x)* in un qualsiasi punto $P(x_0, y_0)$.
La tangente è certamente una delle rette del fascio in P:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

In base alla definizione di derivata il coefficiente angolare m vale:

$$m=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

e quindi nel punto P vale $f''(x_0)$; sostituendo nella formula precedente si ricava:

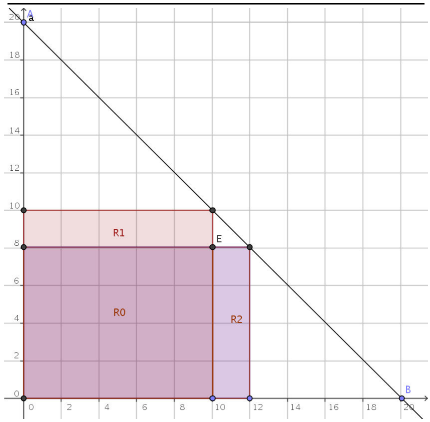
$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

che è appunto la formula generale dell'equazione della tangente alla curva *y=f(x)* nel punto $P(x_0, y_0)$.

4 - Problemi di massimo e minimo

4.1 Introduzione

Un problema matematico classico è quello di trovare il valore massimo o minimo di una funzione.
Prendiamo per esempio questo problema:
Qual è l'area massima che si può recintare con una rete lunga 40 m, e con il vincolo che l'area sia rettangolare.
Il problema può essere risolto in diversi modi:
L'area del rettangolo è data dal prodotto base per altezza. Essendo la rete lunga 40 m la somma di base e altezza deve essere 20 m, $b + h = 20$, ovvero $h = 20 - b$. L'equazione $b + h = 20$ sul piano cartesiano è rappresentata da una retta (vedi disegno a lato); un rettangolo con perimetro 40 m è allora un rettangolo con vertice nell'origine e in un punto di quella retta; facendo variare il vertice sulla retta tra il punto (0;20) e il punto (20;0) si ottengono tutti i possibili rettangoli di perimetro 40 m.



Quadrato e rettangolo

Osservando il disegno è facile convincersi che tra questi rettangoli quello di area massima è il quadrato; infatti confrontando il quadrato (in arancio sul disegno) con un qualsiasi rettangolo (in celeste sul disegno) si nota che l'area del quadrato è la somma dei rettangoli R0 e R1, mentre quella del rettangolo è R0+R2. Ma R1 ha area maggiore di R2 perché una delle dimensioni è uguale per entrambi, mentre l'altra è per R1 il lato del quadrato (qui 10m) per il rettangolo sicuramente minore di 10m.

Ne consegue che il quadrato ha area maggiore di quella di un qualsiasi rettangolo con lo stesso perimetro ed è quindi il rettangolo di area massima.
In alternativa si può risolvere il problema cercando il valore b che rende massima la funzione area:
Area = b(20 – b) = 20b - b²
Si riconosce che la funzione è una parabola della forma:

$$y = -x^2 + 20x$$

avendo posto *x* = *b*, base del rettangolo. Non c'è bisogno dell'analisi per sapere che la parabola ha la concavità verso il basso e la *x* del vertice vale, in base alla formula nota dalla geometria analitica:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-20}{-2} = \frac{20}{2} = 10$$

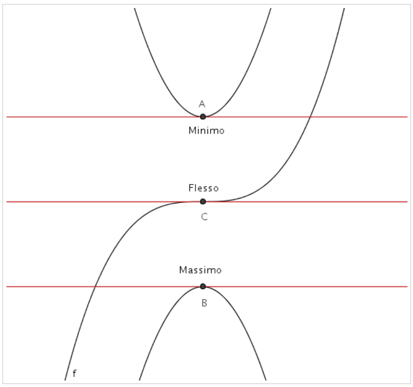
Dunque la funzione ha il valore massimo per x = 10, e quindi il rettangolo di area massima è quello che ha base e altezza uguali, in altre parole è il quadrato. Il risultato si generalizza a qualsiasi valore del perimetro.
I metodi qui visti hanno il difetto di essere metodi ad hoc, specifici per questo problema; anche il secondo metodo vale solo per una funzione di secondo grado (parabola); per altre funzioni, algebriche fratte, goniometriche, esponenziali non avrebbe senso.
È quindi importante trovare un metodo generale per determinare i valori massimi o minimi di una funzione, Con le derivate questo metodo può essere definito facilmente a partire dalla regola di Fermat.

4.2 La regola di Fermat

Che significato ha il fatto che la derivata valga zero per un certo valore della *x*?
La tangente alla funzione *f(x)* è orizzontale o, detto in modo più preciso, è parallela all'asse delle *x*. In altre parole la funzione non cresce e non decresce, è *stazionaria*.
Un punto nel quale la funzione ha derivata nulla si dirà allora *punto stazionario*.
È questo il senso della regola di Fermat:

Un punto $P(x_0, y_0)$ di una funzione $f(x)$ è stazionario se e solo se $f'(x_0) = 0$.

Dal punto di vista geometrico, possono darsi tre tipi di punti stazionari, come da figura a lato:



1. punti di *minimo*: la funzione è decrescente prima e crescente dopo il punto stazionario.
2. Punti di *massimo*: la funzione è crescente prima e decrescente dopo il punto stazionario.
3. Punti di *flesso a tangente orizzontale*: la funzione è crescente prima e dopo il punto stazionario (flesso crescente)

4.3 Ricerca dei massimi e minimi di una funzione

La regola di Fermat fornisce la base per cercare i massimi e minimi di una funzione $f(x)$; in pratica si seguirà questa falsariga:

1. Calcolare la derivata $f'(x)$.
2. Risolvere l'equazione $f'(x) = 0$.
3. Discutere le soluzioni di questa equazione per decidere se si tratta di massimo, minimo o flesso a tangente orizzontale.

Per questo ultimo esistono due metodi classici:

- I metodo per la ricerca di massimi e minimi: distingue massimi, minimi e flessi risolvendo la disequazione $f'(x) > 0$.
- II metodo per la ricerca di massimi e minimi: distingue massimi, minimi e flessi discutendo il segno della derivata seconda $f''(x)$ ed eventualmente delle derivate successive.

N.B. I punti di massimo e minimo sono ovviamente da intendere come punti di massimo e minimo locale (o relativo). Può benissimo capitare che un punto di massimo locale abbia ordinata (y) inferiore a quella di altri punti lontani della funzione o addirittura che un punto di massimo locale abbia ordinata inferiore a quella di un minimo locale. Vedi per esempio lo studio di una iperbole con massimo e minimo.

4.4 I metodo per la ricerca dei massimi e minimi

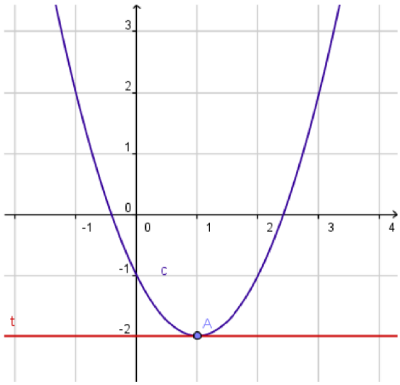
Il metodo si basa sul fatto che nei punti stazionari (massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale) la tangente è orizzontale, e quindi la derivata deve essere nulla.
Si tratta quindi, prima di tutto, di calcolare la derivata f'(x) e porre f'(x) = 0.
A differenza del II metodo il I metodo non richiede il calcolo delle derivate successive, ma solo la soluzione della disequazione f'(x) > 0 dopo aver risolto la corrispondente equazione f'(x) = 0.
Le soluzioni della disequazione ci dicono che la funzione è crescente laddove la derivata è positiva, e decrescente là dove la derivata è negativa. Osservando lo schema si può facilmente decidere se si tratta di un punto di massimo o di minimo

a. se la derivata è crescente prima e decrescente dopo il punto si ha un massimo.
b. se la derivata è decrescente prima e crescente dopo il punto si ha un minimo.
c. se la derivata è decrescente prima e dopo il punto si ha un flesso (decrescente).
d. se la derivata è crescente prima e dopo il punto si ha un flesso (crescente).

Vediamo i seguenti tre esempi per comprendere meglio il metodo.

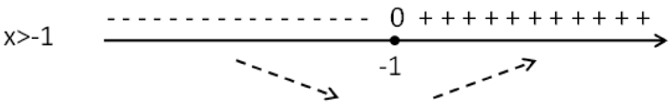
4.4.a Esempio 1

Sia data la funzione $y = x^2 + 2x - 1$ (si tratta di una normalissima parabola).
La derivata è $y' = 2x + 2$
Uguagliando a zero si ha l'equazione $2x + 2 = 0$, e quindi $2x = -2$ e $x = -1$.
La disequazione $2x + 2 > 0$ si risolve in $2x > -2$ e [dividendo per 2] $x > -1$



La parabola in oggetto

Dunque per x -1 la derivata è positiva e la funzione è crescente; lo schema qui sotto mostra che si tratta di un minimo.



La *y* del minimo si trova sostituendo nell'equazione della primitiva:

$$y=x^2+2x-1=(-1)^2+2(-1)-1=+1-2-1=-2.$$

In conclusione abbiamo un punto di minimo *min(-1, -2)* e il grafico è quello che segue:

4.4.b Esempio 2

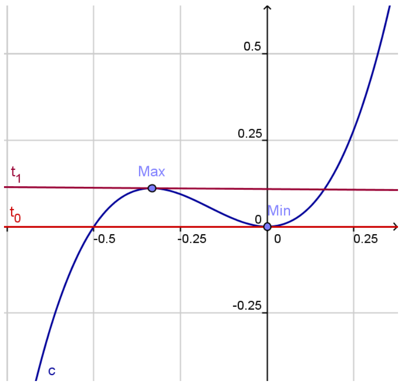
Sia data la funzione $y = 6x^3 + 3x^2$ (parabola cubica).
La derivata è

$$y' = 18x^2 + 6x$$

Si ha allora la disequazione $18x^2 + 6x > 0$, e quindi mettendo in evidenza $6x$ $6x(3x + 1) > 0$; la disequazione si studia con il seguente schema:

```
                        -1/3          0
6x > 0          ---------------------o++++++++++++++
3x + 1 > 0      ------------o+++++++++++++++++++++++
                    + /              - \               + /
```

Dall'osservazione dello schema vediamo che per $x = -1/3$ si ha un massimo, per $x = 0$ un minimo.
La y dei due punti si trova sostituendo nell'equazione della primitiva
I caso $x = -1/3$ $y = 6(-1/27) + 3(1/9) = -6/27 + 3/9 = -2/9 + 3/9 = 1/9$.
II caso $x = 0$; $y = 6*0 + 3*0 = 0$.



La cubica in oggetto

Dunque abbiamo

- un punto di massimo: ***max(-1/3, +1/9)***.
- un punto di minimo: ***min (0, 0)***.

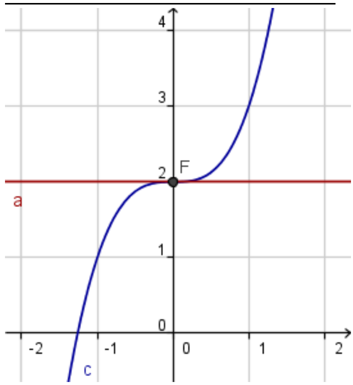
4.4.c Esempio 3

Sia data la funzione $y=x^3+2$ (parabola cubica).
La derivata è $y'=3x^2$
L'equazione $3x^2 = 0$ ha la sola soluzione $x = 0$. La disequazione $3x^2 > 0$ è sempre vera salvo che per $x = 0$ dove si annulla, come si vede nello schema a lato.

```
                 0
3x²  ++++++++++0+++++++++
          /           /
```

La derivata è sempre positiva e quindi la funzione sempre crescente, tranne che per x = 0 dove per un "attimo" la funzione è costante.
Per x = 0 si ha quindi un flesso a tangente orizzontale.
Flex(0, 2).

Il grafico è quello della figura a lato, dove è evidenziata la tangente nel flesso, orizzontale naturalmente.
Appare evidente che la curva è ovunque crescente salvo per *x = 0*.



La cubica in oggetto

4.5 Il metodo per la ricerca dei massimi e minimi

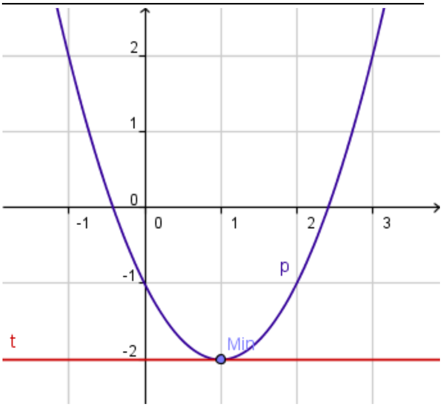
Questo secondo metodo è puramente analitico nel senso che fa uso solo delle derivate,
Come nel primo metodo si calcola la derivata prima f'(x) e si risolve l'equazione f'(x) = 0.; per decidere se le soluzioni dell'equazione corrispondano a punti di massimo, di minimo o di flesso, si studiano le derivate successive, prima di tutte la derivata seconda, che ha il significato geometrico di concavità.
Si calcola quindi la derivata seconda y" che è comunque una funzione della x; si sostituisce la x con il valore del sospetto massimo o minimo e si controlla il segno.
[N.B. qui della derivata seconda ci interessa solo il segno; se questo è evidente fin dall'inizio è inutile sobbarcarsi al calcolo esatto del suo valore]
A questo punto sono possibili tre casi:

1. la derivata seconda è positiva, la concavità è verso l'alto e abbiamo un minimo.
2. la derivata seconda è negativa, la concavità è verso il basso e abbiamo un massimo.
3. la derivata seconda è nulla (caso dubbio) in questo caso non si può concludere nulla, ma occorre calcolare le derivate successive secondo il seguente schema:
    a. se la prima derivata che non si annulla è di ordine dispari, c'è un flesso a tangente orizzontale (crescente o decrescente secondo che la derivata è positiva o negativa);
    b. se la prima derivata che non si annulla è di ordine pari, c'è un massimo o un minimo; il segno di questa derivata ha lo stesso significato della derivata seconda se è positivo si ha un minimo; se è negativo si ha un massimo.

Rivediamo ora i tre esempi precedenti risolti con il II metodo.

4.5.a Esempio 1

Sia data la funzione $y = x^2 + 2x - 1$ (si tratta di una normalissima parabola).
La derivata è y' = 2x + 2, la derivata seconda è y" = 2.
Uguagliando a zero si ha l'equazione 2x + 2 = 0, e quindi 2x = -2 e x = -1.
Dunque per x = -1 si ha un possibile massimo o minimo.
Per decidere si calcola la derivata seconda per x = -1 che è comunque positiva, dunque si ha un minimo, che è poi il vertice della parabola.



La parabola $x^2 + 2x - 1$

La y del minimo si trova sostituendo nell'equazione della primitiva $y = x^2 + 2x - 1 = (-1)^2 + 2*(-1) - 1 = +1 - 2 - 1 = -2$.
Il minimo è in definitiva **min(-1, -2)**.

4.5.b Esempio 2

Sia data la funzione:
$y = 6x^3 + 3x^2$
che è una parabola cubica.
La derivata è:
$y' = 18x^2 + 6x$
Uguagliando a zero si ha l'equazione $18x^2 + 6x = 0$, e quindi mettendo in evidenza $6x$, $6x(3x + 1) = 0$; dunque si hanno le due soluzioni:

1. 6x = 0; x = 0;
2. 3x + 1 = 0;
   x = -1/3;

La cubica $6x^3 + 3x^2$

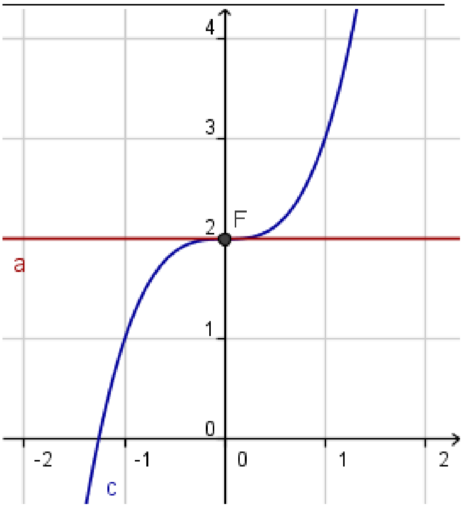
Dunque abbiamo due possibili punti di massimo o minimo.
Per decidere si considera la derivata seconda y" = 36x + 6.

1. I caso per x = -1/3 si ha y" = 36(-1/3) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0; si tratta di un massimo.
2. II caso per x = 0 si ha y" = 6 = +6 > 0 e dunque c'è un minimo.

La y dei due punti si trova sostituendo nell'equazione della primitiva
I caso x = -1/3 y = 6(-1/27) + 3(1/9) = -6/27 + 3/9 = -2/9 + 3/9 = 1/9. II caso x = 0; y = 6*0 + 3*0 = 0.
Dunque abbiamo un massimo M(-1/3, 1/9) e un minimo N(0, 0).

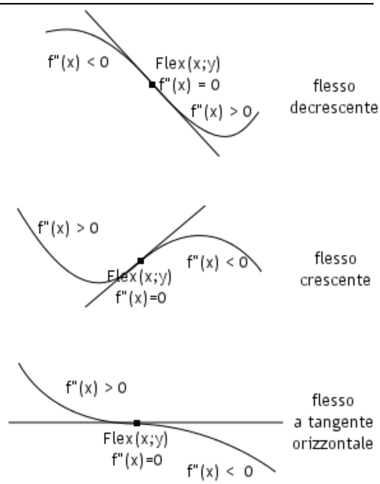
4.5.c Esempio 3

Sia data la funzione $y = x^3 + 2$ (parabola cubica).
La derivata è $y' = 3x^2$.
Uguagliando a zero si ha l'equazione $3x^2 = 0$, e quindi si ha una sola soluzione $x = 0$.
Per decidere si calcola la derivata seconda y" = 6x che per x = 0 si annulla a sua volta; siamo quindi nel caso dubbio.
Si calcola allora la derivata terza y''' = 6 che è comunque positiva; dunque la prima derivata che non si annulla è di ordine dispari, e si tratta di un flesso a tangente orizzontale.



La cubica $y = x^3 + 2$

4.6 Ricerca dei punti di flesso di una funzione



Punti di flesso

Intuitivamente un punto di flesso è un punto nel quale cambia la curvatura (ovvero la concavità): immaginiamo di camminare lungo una strada che curva a destra e a un dato punto inizia a curvare a sinistra; tra il prima e il dopo c'è un attimo e quindi un punto nel quale per un *istante* si cammina diritto (né a destra, né a sinistra): quello è il punto di flesso.
Abbiamo già visto che la derivata seconda ha precisamente il significato geometrico di concavità dunque il flesso deve essere un punto nel quale la concavità non è né positiva né negativa e quindi nulla. Analiticamente deve essere:

$$f''(x) = 0$$

Questa condizione è ovviamente necessaria[17] ma non è sufficiente ad assicurare la presenza di un flesso; potrebbe anche trattarsi di un massimo o minimo *piatto* e cioè con derivate prima e seconda entrambe nulle.
La ricerca dei flessi può allora impostarsi in modo del tutto analogo a quella dei massimi e minimi sostituendosi alla derivata prima la derivata seconda.
Si tratta di:

1. Calcolare la derivata seconda della funzione $f''(x)$.
2. Risolvere l'equazione $f''(x) = 0$.
3. Discutere le soluzione dell'equazione per decidere se si

17 ... tutto questo alla condizione che *f''(x)* sia continua; altrimenti potrebbero darsi punti di flesso nei quali la concavità cambia segno in modo discontinuo.

tratta realmente di un flesso.

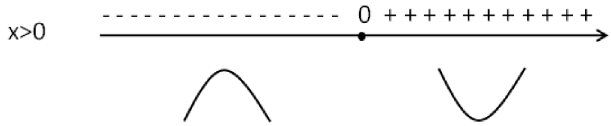
Come per i massimi e minimi anche qui sono possibili due metodi:

- I metodo: consiste nello studiare il segno di *f"(x)* o che è lo stesso risolvere la disequazione *f"(x) > 0*.
- II metodo: consiste nell'esaminare il segno della derivata terza f'''(x) ed eventualmente delle derivate successive.

4.7 I metodo per la ricerca dei punti di flesso

Il metodo si basa sul fatto che nei punti di flesso la derivata seconda deve essere nulla.

Si tratta quindi, prima di tutto, di calcolare la derivata f"(x) e quindi porre f"(x) = 0.



A differenza del II metodo il I metodo non richiede il calcolo di altre derivate, ma solo la soluzione della disequazione f"(x) > 0.

Le soluzioni della disequazione ci dicono dove la concavità è verso l'alto (f"(x) > 0) e dove verso il basso (f"(x) > 0). Osservando lo schema si può facilmente decidere se si tratta di un punto di flesso o di un punto *piatto*.

a. se la derivata seconda è positiva prima e negativa dopo il punto si ha un flesso.
b. se la derivata seconda è negativa prima e positiva dopo il punto si ha un flesso.
c. se la derivata seconda è positiva sia prima sia dopo si ha un punto *piatto*.
d. se la derivata seconda è negativa sia prima sia dopo si ha un punto *piatto*.

Vediamo ora i seguenti tre esempi per comprendere meglio il metodo.

4.7.a Esempio 1

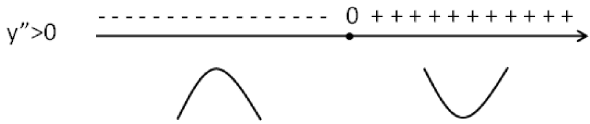
Sia data la funzione

$$y=x^3-x$$

Le derivate sono:

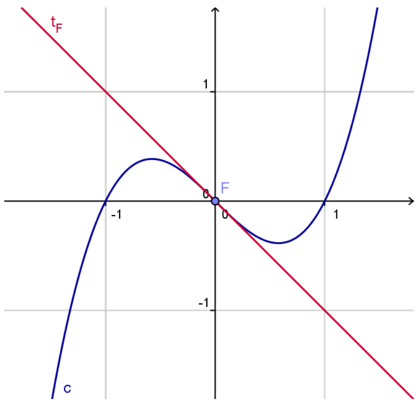
$$y'=3x^2-1$$
$$y''=6x$$

Uguagliando a zero si ha l'equazione 6x = 0, e una sola soluzione x = 0. La disequazione è rappresentata dallo schema seguente.



Osservando lo schema si vede che la concavità è verso il basso per *x < 0* e verso l'alto per x > 0 e quindi si ha il flesso Flex(0;0) coincidente con l'origine; la derivata prima $3x^2 - 1$ vale -1 per x = 0 e quindi il flesso ha tangente decrescente.

Tutto questo è ben evidente nel disegno qui accanto dove la cubica è in blu, mentre è evidenziata in rosso la tangente per il flesso (origine). Appare evidente che il flesso è il punto nel quale la curva cambia concavità ed è anche il punto nel quale la tangente attraversa la curva.



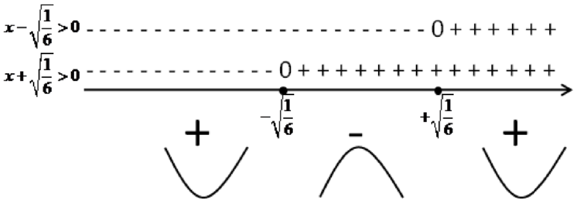
La cubica con il flesso

4.7.b Esempio 2

Sia data la funzione $y=x^4-x^2$

Le derivate sono: $y'=4x^3-2x$
$y''=12x^2-2$

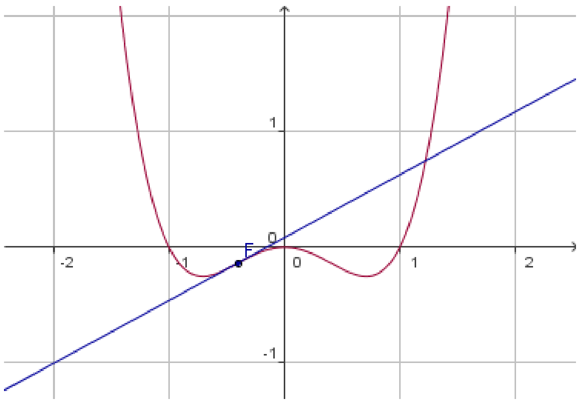
Uguagliando a zero si ha l'equazione $12x^2-2=0$, e le due soluzioni sono $x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\approx 0{,}4$



Osservando lo schema si vede che la concavità cambia per $x=-\sqrt{\frac{1}{6}}$ e per $x=+\sqrt{\frac{1}{6}}$; dunque ci sono due flessi:

$$Flex_1\left(-\sqrt{\frac{1}{6}};-\frac{5}{36}\right) Flex_2\left(+\sqrt{\frac{1}{6}};-\frac{5}{36}\right).$$

Calcolando f'(-√(1/6)) si trova: -√(1/216)-2.(-√(1/6)) ~ 0,74 dunque il primo flesso è crescente; analogamente si ricava che il secondo flesso vale circa -0,74 e quindi è decrescente.



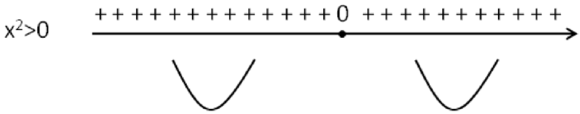
La quartica

4.7.c Controesempio

Si consideri la funzione $y=x^4$ che ha le seguenti derivate

$$y'=4x^3$$
$$y''=12x^2$$

la derivata seconda *12* x^2 si annulla per $x = 0$ ma è sempre positiva per ogni altro valore di x, come appare nel quadro seguente.



Ne segue che la concavità è sempre verso l'alto, non c'è alcun cambio di concavità, e quindi nessun flesso, ma piuttosto un punto di minimo *molto piatto*.

4.8 Il metodo per la ricerca dei punti di flesso

Il metodo si basa sul fatto che nei punti di flesso la derivata seconda deve essere nulla e la prima derivata successiva che non si annulla deve avere ordine dispari; se viceversa ha ordine pari non ci sarà flesso, ma un punto di massimo o di minimo come se si trattasse della derivata seconda.
Si tratta quindi di calcolare la derivata f"(x), risolvere f"(x) = 0 e per ogni soluzione x_i calcolare f'''(x_i):

1. se f'''(x_i) ≠ 0 c'è un flesso;
2. se f'''(x_i) = 0 occorre calcolare le derivate successive fino a trovarne una che non si annulla.
   1. Se la prima derivata che non si annulla ha ordine dispari, c'è un flesso.
   2. Se la prima derivata che non si annulla ha ordine pari, non c'è un flesso.

Si vedano comunque i seguenti tre esempi per comprendere meglio il metodo.

4.8.a Esempio 1

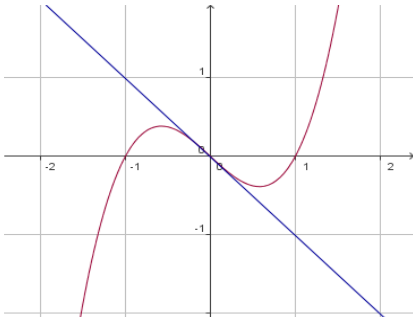


Grafico della cubica

Sia data di nuovo la funzione

$$y = x^3 - x$$

Le derivate successive sono:

$$y' = 3x^2 - 1$$
$$y'' = 6x$$
$$y''' = 6$$

Uguagliando a zero si ha l'equazione 6x = 0, e una sola soluzione x = 0; la derivata terza è uguale a 6, quindi comunque positiva: si ha il flesso Flex(0;0) coincidente con l'origine; la derivata prima $3x^2$ - 1 vale -1 per x = 0 e quindi il flesso ha tangente decrescente.

4.8.b Esempio 2

Sia data di nuovo la funzione:

$$y = x^4 - x^2$$

Le derivate successive sono:

$$y' = 4x^3 - 2x$$
$$y'' = 12x^2 - 2$$
$$y''' = 24x$$

Uguagliando a zero si ha l'equazione $12x^2$ - 2, e le due soluzioni sono x = ±√(1/6) ≈ 0,4

La derivata terza *24x* ha lo stesso segno di *x*, dunque è negativa per *x* = *-√(1/6)* e positiva per *x* = *+√(1/6)*; in ogni caso è diversa da zero e quindi si tratta di due flessi:

$$Flex1\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}; -\frac{5}{36}\right)$$
$$Flex2\left(\sqrt{\frac{1}{6}}; -\frac{5}{36}\right)$$

$$f'(-\sqrt{\frac{1}{6}})=4(-\sqrt{\frac{1}{216}})-2(-\sqrt{\frac{1}{6}})=-\sqrt{\frac{64}{216}}+\sqrt{\frac{8}{6}}\approx-0{,}54433+1{,}1547\approx 0{,}61$$

Calcolando la derivata prima in *Flex1* si trova

dunque il primo flesso ha pendenza positiva ed è crescente; analogamente si ricava che il secondo flesso vale circa -0,61 e quindi è decrescente.
Tutto questo si ritrova nel grafico della curva.

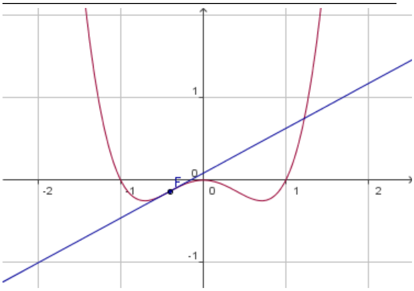


Grafico della quartica

4.8.c Controesempio

Consideriamo di nuovo la funzione $y=x^4$ con le sue derivate

$$y'=4x^3$$
$$y''=12x^2$$
$$y^{iii}=24x$$
$$y^{iv}=24$$

la derivata seconda *12 x²* si annulla per *x = 0,* ma anche la derivata terza si annulla per *x = 0,* mentre non è nulla la derivata quarta.
Ne segue che c'è un punto stazionario ed essendo la derivata quarta positiva si tratta di un minimo (*molto piatto)*.

5 - Primi esempi di studio di funzione

5.1 Introduzione

Nelle prossime pagine vediamo qualche primo esempio di studio di funzione. Obiettivo dello studio di funzione è quello di studiare le caratteristiche di una funzione fino a disegnarne nel modo più accurato possibile il grafico
Non è possibile definire nei minimi dettagli i singoli passi di questo studio; a seconda del tipo di funzione possono avere maggior peso alcune caratteristiche di una funzione rispetto ad altre. Per esempio un polinomio non ha asintoti (rette alle quali la curva si avvicina senza mai toccarla; vedi più avanti cap. 13) e non è necessario cercarli, mentre un'iperbole con asintoto orizzontale non può avere massimi e minimi.
Ecco una prima trafila per lo studio di una funzione polinomiale $y = f(x)$.

- Insieme di definizione è l'insieme nel quale la funzione è definita; per solito l'insieme dei numeri reali esclusi alcuni valori "illeciti"; p.es. i valori che annullano il denominatore di una frazione, o i valori negativi in un radicale. Per i polinomi non ci sono problemi, l'insieme di definizione è sempre R, insieme dei numeri reali.
- Riconoscimento di eventuali simmetrie (assiali, centrali)
- Ricerca degli zeri della funzione, ovvero soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.
- Studio del segno della funzione, ovvero soluzione della disequazione $f(x) > 0$.
- Ricerca dei punti di massimo e minimo.
- Ricerca dei punti di flesso.

5.2 Una funzione algebrica di 3° grado

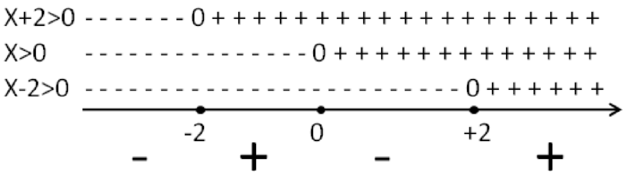
Studiare la funzione

$y = x^3 - 4x$

Si tratta di una curva algebrica di 3° grado (cubica)

Vediamo i singoli passi dello studio

1. Insieme di definizione: si tratta di un polinomio calcolabile per ogni numero reale, dunque I = R.
2. Ricerca di eventuali asintoti: i polinomi non hanno asintoti.
3. Ricerca degli zeri della funzione, ovvero soluzione dell'equazione $x^3 - 4x = 0$. Basta mettere in evidenza x e quindi fattorizzare la differenza di quadrati:
$$x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$$
Vi sono quindi tre zeri: A x = -2 ; B x = 0 ; C: x = +2.
4. **Studio del segno della funzione,** ovvero soluzione della disequazione $x^3 - 4x = 0$. Utilizzando il risultato appena ottenuto la disequazione si spezza in tre disequazioni elementari:



La funzione è negativa per x < -2 e 0 < x < 2 e positiva altrove.

5. **Calcolo delle derivate** La derivata si ottiene utilizzando la regola di derivazione della somma e quella della potenza:
$$y' = 3x^2 - 4$$
Le derivate successive sono:
$$y'' = 6x$$
$$y''' = 6$$
6. **Ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi.** Si tratta di risolvere l'equazione f'(x) = 0, in questo caso $3x^2 - 4 = 0$ che ha per soluzioni:

$$x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{(3)}}{3}\approx 1.1547\ldots$$

Si hanno quindi due punti stazionari per x= -2/√3 e x = +-2/√3; usando il II metodo si calcola la derivata seconda per ogni punto:

I x= -2/√3 f"(-2/√3) = -12/√3 < 0 c'è un massimo

II x= +2/√3 f"(+2/√3) = +12/√3 > 0 c'è un minimo

Le ordinate dei due punti si ottengono sostituendo nell'equazione di partenza.

$$I\ x=-\frac{2}{\sqrt{(3)}};y=f(-\frac{2}{\sqrt{(3)}})=-\frac{8}{\sqrt{(27)}}+\frac{8}{\sqrt{(3)}}=\frac{16}{\sqrt{(27)}}\approx 3{,}0792\ldots$$

$$II\ x=+\frac{2}{\sqrt{(3)}};y=f(\frac{2}{\sqrt{(3)}})=\frac{8}{\sqrt{(27)}}-\frac{8}{\sqrt{(3)}}=-\frac{16}{\sqrt{(27)}}\approx -3{,}0792\ldots$$

e in definitiva si hanno i due punti stazionari:

$$Max(-\frac{2}{\sqrt{(3)}};+\frac{16}{\sqrt{(27)}})\approx(1{,}1542;3{,}0792)$$

$$Max(+\frac{2}{\sqrt{(3)}};-\frac{16}{\sqrt{(27)}})\approx(1{,}1542;3{,}0792)$$

5.2.a Ricerca di eventuali punti di flesso.

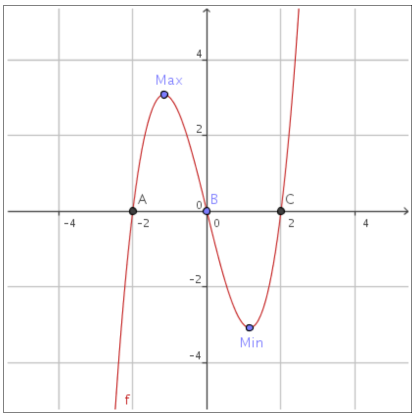
La derivata seconda è *y"* = *6x*; uguagliando a zero si ha:

$$6\mathrm{x}=0$$

$$x=0$$

la derivata terza è 6 e non si annulla mai, quindi si ha un flesso decrescente che coincide con il secondo zero (B)

Riassumendo tutti questi risultati si ottiene il grafico a lato.

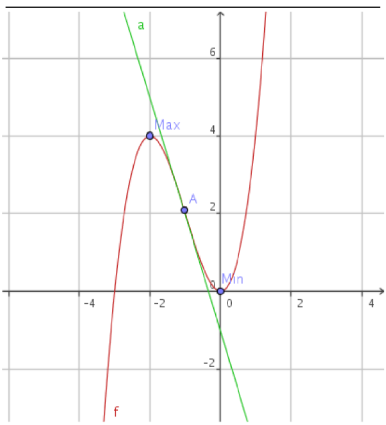


5.3 Ancora una funzione algebrica di 3° grado

Studiare la funzione $y = x^3 + 3x^2$
Si tratta di una funzione algebrica polinomiale di 3° grado (cubica) .
Vediamo i singoli passi dello studio

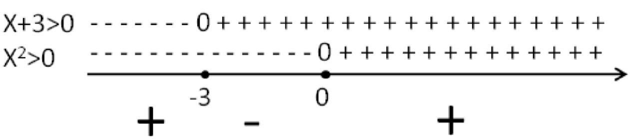
1. ***Insieme di definizione***: un polinomio è calcolabile per ogni numero reale, dunque I = R.
2. ***Ricerca degli zeri della funzione***, ovvero soluzione dell'equazione
   $x^3 + 3x^2 = 0$
   Basta mettere in evidenza x^2 e quindi fattorizzare la differenza di quadrati:
   $x^2(x+3) = 0$

   $I\ x^2 = 0 \,;\, x = 0$
   $II\ x + 3 = 0 \,;\, x = -3$
   C'è quindi uno zero doppio x=0 (nell'origine), e uno zero semplice x=-3



La cubica con la tangente nel punto di flesso

3. ***Studio del segno della funzione***, ovvero soluzione della disequazione $x^3+9x>0$. Utilizzando il risultato appena ottenuto la disequazione si spezza in due disequazioni elementari:



La funzione è negativa per x < -3 e positiva altrove, fatto salvo lo zero nell'origine.

1. **Calcolo delle derivate** La derivata si ottiene utilizzando la regola di derivazione della somma e quella della potenza:
$$y' = 3x^2 + 6x$$
Le derivate successive sono:
$$y^{ii} = 6x + 6$$
$$y^{iii} = 6$$
2. **Ricerca dei massimi, dei minimi.** Si tratta di risolvere l'equazione f'(x) = 0, in questo caso $3x^2 + 6x = 0$ che fattorizzando diventa:
$3x(x+2) = 0$
che ha due soluzioni: x = 0 e x = -2. Usando il secondo metodo per x = 0 la derivata seconda vale 6, è positiva e quindi si tratta di un minimo; per x = -2 la derivata seconda vale -6, è negativa e quindi si ha un massimo.
Abbiamo quindi il massimo M(-2; 4) e il minimo nell'origine (0; 0)
3. **Ricerca dei flessi.** Si tratta di risolvere l'equazione f''(x) = 0, in questo caso 6x + 6 = 0 che ha una sola soluzione x = -1; vi è quindi un flesso nel punto F(-1; 2) che è anche centro di simmetria della curva.
4. **Tangente nel punto di flesso.** La retta tangente nel punto F sarà data dall'equazione del fascio di rette per F con coefficiente angolare pari alla derivata prima per x = -1:
$$y - 2 = f'(-1)(x+1)$$
$$y = 2 - 3(x+1)$$
$$y = -3\mathrm{x} - 1$$
L'equazione della tangente è quindi $y = -3x - 1$

Riassumendo tutti questi risultati si ottiene il grafico della pagina precedente.

5.4 Una funzione algebrica di 4º grado

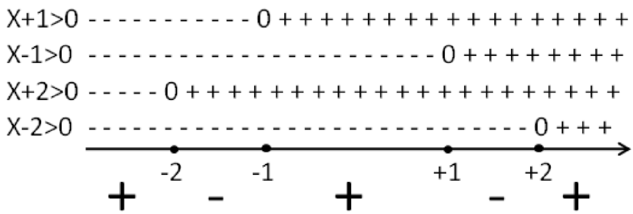
Studiare la funzione

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

Si tratta di una curva algebrica di 4º grado (quartica)
Vediamo i singoli passi dello studio

1. **Insieme di definizione**: si tratta di un polinomio, dunque I = R.
2. **Ricerca degli zeri della funzione**, ovvero soluzione dell'equazione $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Si potrebbe usare la formula dell'equazione di 2º grado rispetto a x^2:
$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{(25-16)}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
le due soluzioni sono quindi $x^2 = 4$; $x^2 = 1$; e vi sono quattro zeri: $x = -2$; $x = -1$; $x = +1$; $x = +2$.
3. **Studio del segno della funzione,** ovvero soluzione della disequazione $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Utilizzando il risultato appena ottenuto la disequazione si può scrivere:
$(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$

   e quindi si ha il seguente andamento del segno:



4. **Calcolo delle derivate** Le derivate successive si ottengono facilmente utilizzando la regola di derivazione della somma e quella della potenza:

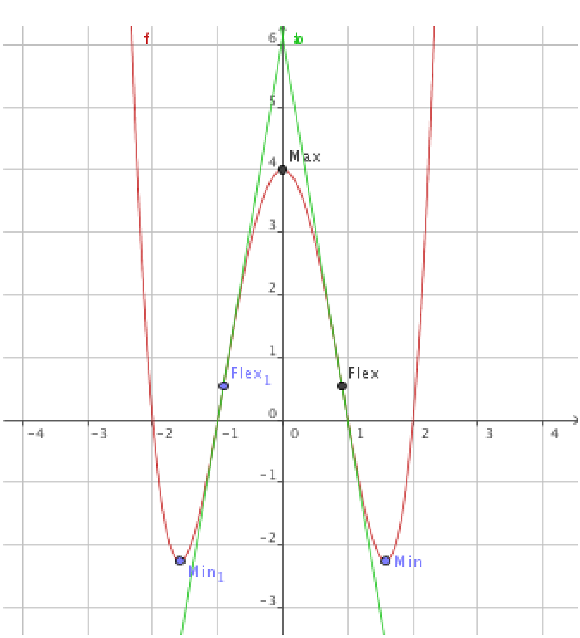
$$y^{i}=4x^{3}-10x$$
$$y^{ii}=12x^{2}-10$$
$$y^{iii}=24x$$
$$y^{iv}=24$$
$$y^{v}=0$$

5. **Ricerca dei massimi, dei minimi.** Si tratta di risolvere l'equazione *f'(x) = 0,* in questo caso $4x^3 - 10x$; mettendo in evidenza la x si ha:
   `x(4x² - 10) = 0; x.(2x + √10).(2x - √10) = 0`

   si hanno quindi tre soluzioni:
$$x=0$$
$$x=-\frac{\sqrt{10}}{2}\approx-1{,}58$$
$$x=+\frac{\sqrt{10}}{2}\approx-1{,}58$$
   Utilizzando il II metodo si deve considerare la derivata seconda e calcolarne il valore per ognuno di questi tre punti:
$$f^{ii}(0)=-10<0\Rightarrow c'\grave{e}\,un\,massimo$$
$$f^{ii}(-\frac{\sqrt{10}}{2})=12\times\frac{10}{4}-10=20>0\Rightarrow c'\grave{e}\,un\,minimo$$
$$f^{ii}(+\frac{\sqrt{10}}{2})=12\times\frac{10}{4}-10=20>0\Rightarrow c'\grave{e}\,un\,minimo$$
   Calcolando le ordinate (y) di questi tre punti si trovano i tre punti stazionari:
$$f(0)=0-4\times0+4=4$$
$$Max(0,4)$$
$$f(-\frac{\sqrt{10}}{2})=\frac{100}{16}-\frac{5\times10}{4}+4=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}+4=-\frac{9}{4}=-2.25$$
$$Min(-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{9}{4})\approx Min(-1{,}58;-2{,}25)$$
$$f(+\frac{\sqrt{10}}{2})=\frac{100}{16}-\frac{5\times10}{4}+4=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}+4=-\frac{9}{4}=-2.25$$
$$Min(+\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{9}{4})\approx Min(+1{,}58;-2{,}25)$$

6. **Ricerca dei flessi.** Si tratta di risolvere l'equazione f''(x) = 0, in questo caso $12.x^2 - 10 = 0$ che ha le due soluzioni: $x = \pm\sqrt{(5/6)} \sim \pm 0{,}91$, con $y = (5/6)^2 - 5(5/6) + 4 = 19/36$. Vi sono quindi due punti di flesso: Flex($\pm\sqrt{(5/6)}$; 19/36) ≈ Flex(±0,91; 0,53)

Riassumendo tutti questi risultati si ottiene il grafico riportato qui di seguito:



La quartica con le tangenti nei punti di flesso

6 - PRIMI PASSI TRA GLI INTEGRALI

6.1 L'integrale indefinito

Spesso, per esempio in Fisica, è necessario determinare la funzione che ha per derivata una funzione data.
È il problema inverso della derivata.
Per esempio è facile verificare che una funzione che ha per derivata $y = x$ (bisettrice del primo quadrante) è:

$$y=\frac{x^2}{2}$$

infatti ...

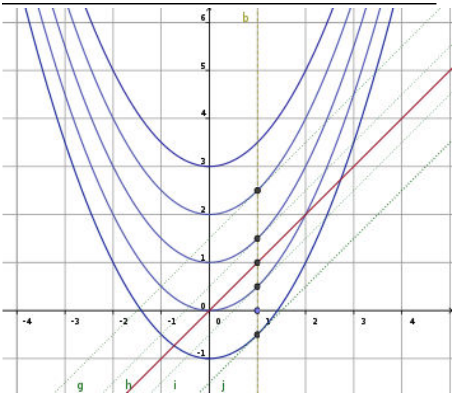
$$D\frac{x^2}{2}=2\frac{x}{2}=x$$

Ma è questa l'unica funzione ad avere x come derivata? In realtà si verifica facilmente che anche

$$y=\frac{x^2}{2}+1$$

$$y=\frac{x^2}{2}+2$$

$$y=\frac{x^2}{2}-1$$



La funzione y=x (retta) e i suoi integrali indefiniti (parabole)

hanno per derivata x; infatti la derivata di 1 è 0, e così pure per ogni altro valore costante. La soluzione più generale per la funzione che ha per derivata x é

$$y=\frac{x^2}{2}+c$$

dove c sta per ***costante di integrazione***. Dunque l'operazione inversa della derivata non ha come risultato una sola funzione, ma una famiglia di infinite funzioni, una per ogni numero reale c.
Nella figura sopra appare evidente che tutte le parabole di

equazione $y=\frac{x^2}{2}+c$ (qui per c= -1, 0, 1, 2, 3) hanno la stessa pendenza per lo stesso valore di x e quindi hanno la stessa derivata.

L'operazione inversa della derivata si chiama *integrale* e si indica con un simbolo speciale, introdotto da Leibniz, una sorta di Esse maiuscola stilizzata con un *dx* alla fine. Si scriverà dunque:

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$$

Più in generale si definisce funzione primitiva o integrale indefinito di una funzione *f(x)*, la funzione *F(x)* che ha *f(x)* per derivata, e si scrive:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

dove la *c* è detta costante di integrazione; questa notazione equivale a scrivere:

$$D F(x)+c=f(x)$$

6.2 Integrale della potenza

Dalla definizione di integrale indefinito seguono immediatamente questi integrali fondamentali:

1. Integrale di x^2 :

   $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c$ infatti $D\frac{x^3}{3}+c=3\frac{x^2}{3}=x^2$

2. Integrale di x^n :

   $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ infatti $D\frac{x^{n+1}}{n+1}+c=\cancel{(n+1)}\frac{x^{\cancel{n+1-1}}}{\cancel{n+1}}=x^n$

3. Integrale di $2x^2$:

   $\int 2x^2\,dx=\frac{2}{3}x^3+c$ infatti $D\frac{2}{3}x^3+c=\frac{2}{3}3x^2=2x^2$

e il fattore 2 può essere portato fuori dall'integrale.

4. Integrale del polinomio $y = 3x^2 - 1$:

   $\int 3x^2-1\,dx=x^3-x+c$ infatti $Dx^3-x+c=3x^2-1$

e l'integrale della somma è la somma degli integrali.
Essendo l'integrale l'operazione inversa della derivata è facile ricavare alcune regole di integrazione, regole che in pratica sono già emerse negli esempi precedenti.
Prima di tutte le regola di derivazione della potenza, generalizzando gli esempi di cui sopra si ricava:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n}+c$$

infatti calcolando la derivata:

$$D\frac{x^{n+1}}{n}+c=\frac{(n+1)x^n}{n+1}=x^n$$

6.3 Proprietà lineari

Come per la derivata valgono le proprietà lineari

$$\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)dx+\int g(x)$$

(l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali)

$$\int k\,f(x)dx=k\int f(x)\,dx$$

(il fattore costante si può portar fuori dall'integrale)

6.4 Integrale di un polinomio

Con queste tre regole è facile derivare un qualsiasi polinomio, basta integrare i singoli termini e fare la somma; alla fine non dimenticare la costante di integrazione.

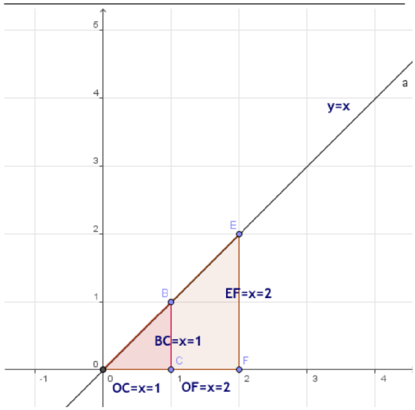
Esempi:

1. $\int x^2-2\mathrm{x}+1\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x+c$
2. $\int x^3-x^2+5\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+5\,x+c$
3. $\int 5\,x^4-x^3+\frac{x^2}{2}\,dx=x^5-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}+c$

6.5 L'integrale è un'area!

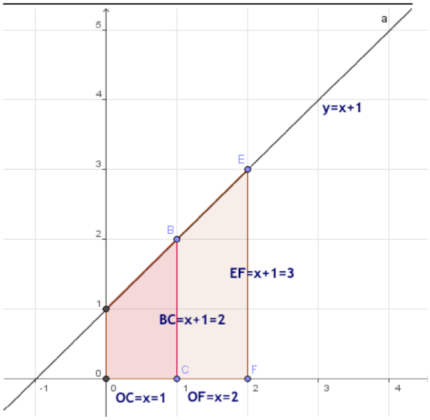
La derivata ha il significato di coefficiente angolare della tangente. Qual è il significato geometrico del suo operatore inverso, l'integrale?

1° esempio: la retta *y = x* (bisettrice del primo quadrante) come si è visto ha integrale $x^2/2 + c$. È immediato notare dal grafico a lato che $x^2/2$ è l'area del triangolo compreso tra la retta e l'asse delle x, tra 0 e x. Questo triangolo rettangolo ha infatti base e altezza (i due cateti) uguali a x, e quindi la sua area è appunto $x^2/2$ (base x altezza / 2), che coincide con l'integrale per c = 0. Per esempio nel disegno a lato per x = 1, il triangolo è OBC ed ha area 1/2; per x = 2 il triangolo è OEF ed ha area 2.



Area sotto la retta y = x

2° esempio: la retta *y = x + 1*; l'integrale è $x^2/2 + x$ (+ c). Il grafico è dato a lato. L'area del trapezio compreso tra la retta, l'asse delle x e le due rette parallele per x = 0 e x = x, è (Base maggiore + base minore)*h/2, dove la Base maggiore è x+1, la base minore è 1, l'altezza è x e quindi l'area vale:



L'area sotto la retta y = x + 1

$$\frac{(x+1+1)x}{2}=\frac{x^2+2x}{2}=\frac{x^2}{2}+x$$

che coincide con l'inte-grale (con c = 0) della funzione. Si noti che il termine $x^2/2$ è l'area del triangolo al di sopra della retta y = 1, il termine *x* è l'area del rettangolo sotto tale retta. I due termini dell'integrale hanno quindi un preciso significato geometrico.

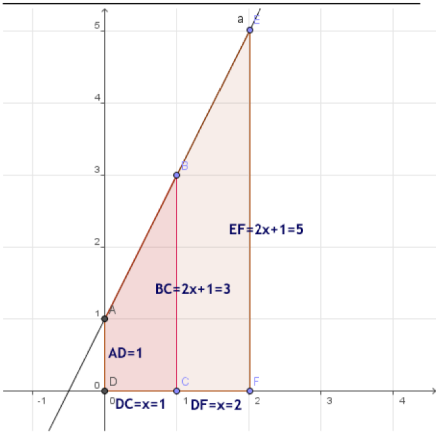
3° esempio: la retta *y* = *2x* + *1*; l'integrale è x^2 + x (+ c). Il grafico è dato a lato. L'area del trapezio compreso tra la retta, l'asse delle x e le due rette parallele per x = 0 e x = x, è (Base maggiore + base minore)*h/2, dove la Base maggiore è 2x+1, la base minore è 1, l'altezza è x e quindi l'area vale:

$$\frac{(x+1+1)x}{2}=\frac{x^2+2x}{2}=\frac{x^2}{2}+x$$

che coincide con l'integrale indefinito (con c = 0) della funzione.

La conclusione sembra essere questa: l'integrale indefinito è una funzione che permette di calcolare l'area compresa tra la curva e l'asse delle x, nell'intervallo [0;x].

Il risultato è sorprendente perché stabilisce una connessione tra due concetti geometrici apparentemente lontani, come quello di tangente e quello di area.



L'area sotto la retta y = 2x + 1

Naturalmente i tre semplici esempi visti sopra non assicurano che questa proprietà sia sempre valida. Vedremo in seguito come dimostrarlo con il *teorema fondamentale dell'Analisi*.

7 - CALCOLO DI AREE

7.1 Calcolo approssimato di aree

Un altro problema che ha portato al calcolo infinitesimale è quello del calcolo delle aree, a prima vista del tutto distinto da quello della tangente; ma gli esempi del paragrafo 6.4 lasciano intuire che ci sia un legame tra i due problemi.
Se il calcolo delle aree di figure elementari come triangolo, trapezio, rettangolo, quadrato è riducibile alle ben note e semplici formulette che si studiano alle scuole medie, il calcolo dell'area delimitata da un perimetro irregolare o curvilineo o da una curva matematica è di notevole complessità e il più delle volte impossibile da ridurre a formule elementari.
Prima di cercare una soluzione *esatta* del problema, con-viene provare la strada delle approssimazioni successive (*metodi numerici)*; in particolari esistono due metodi molto semplici:

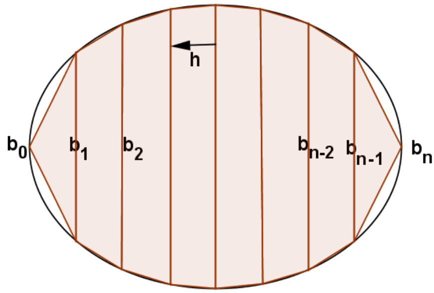
- La formula dei trapezi che consiste nel *tagliare a fette* di forma trapezoidale la figura di cui vogliamo l'area, approssimandola appunto come somma di trapezi..
- La formula di Simpson simile alla precedente ma che approssima l'area per mezzo di trapezoidi con un lato curvilineo che è poi un arco di parabola. Funziona meglio della precedente quando si tratta di calcolare l'area delimitata da funzioni matematiche.

7.2 La formula dei trapezi

Un metodo semplice per il calcolo approssimato di un'area è quello di *tagliare a fette* la figura e cioè nell'intersecarla con un fascio di **n+1** rette parallele equidistanti (con distanza **h**), come in figura. La figura risulta allora divisa in **n** trapezoidi, ovvero quadrilateri con due lati paralleli e due curvilinei o comunque irregolari.
É allora spontaneo approssimare l'area della figura con la

somma delle aree degli **n** trapezi. L'approssimazione sarà ovviamente tanto migliore quanto maggiore il numero **n** di trapezi ovvero tanto più piccola la distanza **h**.

Si tratta allora di misurare gli **n** segmenti $\mathbf{b_i}$ intersecati dalla figura sulle rette, che vengono ad essere le basi dei trapezi. L'area di ogni trapezio è allora data dalla nota formula $(b_i + b_{i+1})h/2$.



L'area approssimata della figura è allora data dalla somma di queste aree:

$$A=\frac{(b_0+b_1)h}{2}+\frac{(b_1+b_2)h}{2}+\ldots+\frac{(b_{n-2}+b_{n-1})h}{2}+\frac{(b_{n-1}+b_n)h}{2}$$

che si semplifica ponendo in evidenza il termine comune $h/2$:

$$A=\frac{h}{2}(b_0+b_1+b_1+b_2+\ldots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_{n-1}+b_n)$$

e quindi sommando i termini a due a due uguali:

$$A=\frac{h}{2}(b_0+2b_1+2b_2+\ldots+2b_{n-1}+b_n)$$

che è appunto la formula dei trapezi per il calcolo approssimato delle aree. La formula è utile anche per il calcolo approssimato di un integrale definito.

7.3 Area sottesa da una funzione con i trapezi

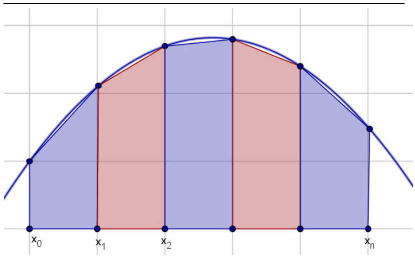
La formula dei trapezi è utile anche per il calcolo dell'area sottesa da una funzione in un intervallo, alla sola condizione di saper calcolare la funzione in tutto l'intervallo.
L'intervallo [a, b] viene diviso in n intervalli di ampiezza h, dove $x_0 = a$ e $x_n = b$. La formula assume la forma:

$$Area\left(f(x), x_{0,} x_n\right) \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2 f(x_1)+2 f(x_2)+\ldots+2 f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

o anche, portando il fattore ½ dentro la parentesi:

$$Area\left(f(x), x_{0,} x_n\right) \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

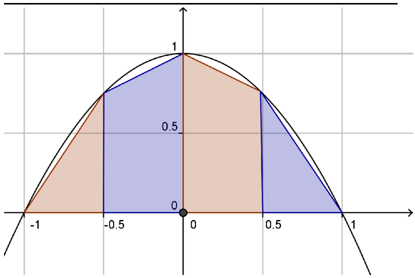
Questa formula può facilmente tradursi in un algoritmo in un qualsiasi linguaggio di programma-zione.



Area approssimata da n trapezi

7.3.a Esempio con la formula dei trapezi.

Dobbiamo calcolare l'area sottesa alla funzione $y=1-x^2$
Si tratta, come è facile verificare, di una parabola con la concavità verso il basso, vertice in (0;1) e zeri per x= -1 e x = +1.
Come primo tentativo dividiamo l'area in quattro trapezi con intervallo di 0,5.



La parabola in oggetto

I trapezi hanno tutti la stessa altezza 0,5; le basi si hanno calcolando la funzione per x = -1; x = -0,5; x= 0; x = 0,5; x = 1.
Sostituendo nella formula dei trapezi si ha:

$$\frac{h}{2}(f(-1)+2\mathrm{f}(-\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(0)+2\mathrm{f}(\frac{1}{2})+f(0))$$

$$\frac{1}{4}(0+2(\frac{3}{4})+2+2(\frac{3}{4})+0)=\frac{1}{4}(5)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Con quattro trapezi si ottiene il valore 1,25; l'errore deve essere per difetto come si vede dal disegno: i trapezi sono approssimazioni per difetto dei trapezoidi delimitati dalla parabola.
Per avere una maggiore precisione con i trapezi bisogna aumentare il numero degli intervalli; per esempio se lo raddoppiamo portandolo a otto trapezi, si ha:

$$\frac{h}{2}\left(f(-1)+2\mathrm{f}(-\frac{3}{4})+2\mathrm{f}(-\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(-\frac{1}{4})+2\mathrm{f}(0)+2\mathrm{f}(\frac{1}{4})+2\mathrm{f}(\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(\frac{3}{4})+f(0)\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(0+2(\frac{7}{16})+2(\frac{3}{4})+2(\frac{15}{16})+2+2(\frac{15}{16})+2(\frac{3}{4})+2(\frac{7}{16})+0\right)=\frac{1}{8}(\frac{168}{16})=\frac{21}{16}=1{,}3125$$

L'approssimazione è ora 1,3125 già molto vicina al valore *vero che come vedremo è* 1,333 ...
La convergenza della formula dei trapezi è piuttosto lenta, ma inserendola in un algoritmo per computer permette di arrivare

7.4 Calcolo di aree con la formula di Simpson

La formula di Simpson è simile a quella dei trapezi, ma anziché interpolare la funzione da integrare con i segmenti di retta per due punti, usa archi di parabola per tre punti. In tal modo si ha un notevole miglioramento della velocità di convergenza.
Si dimostra che la formula di Simpson è:

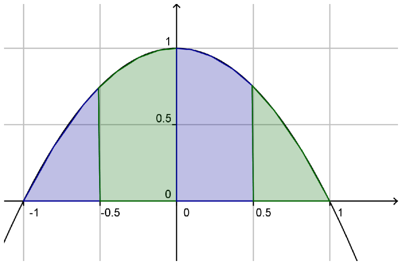
$$Area(f(x), x_{0,} x_n) \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n))$$

La formula richiede che l'intervallo [a, b] sia diviso in un numero pari di intervallini di ampiezza h, ed è ovviamente esatta per i polinomi di secondo grado, e un po' meno ovviamente esatta anche per quelli di terzo grado.

La formula può facilmente tradursi in un algoritmo in un qualsiasi linguaggio di programmazione.

7.5 Esempio con la formula di Simpson.

1. Riprendiamo il problema precedente: calcolare l'area sottesa alla funzione $y=1-x^2$ tra i suoi due zeri, x= -1 e x = +1.
Si tratta ancora della parabola in figura e l'area vale sempre 4/3.
Come primo tentativo dividiamo l'area in quattro trapezoidi con intervallo di 0,5.



La parabola in oggetto

I trapezi hanno tutti la stessa altezza 0,5; le basi si hanno calcolando la funzione per x = -1; x = -0,5; x= 0; x = 0,5; x = 1.
Sostituendo nella formula di Simpson si ha:

$$\frac{h}{3}\left(f(-1)+4\mathrm{f}(-\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(0)+4\mathrm{f}(\frac{1}{2})+f(0)\right)$$

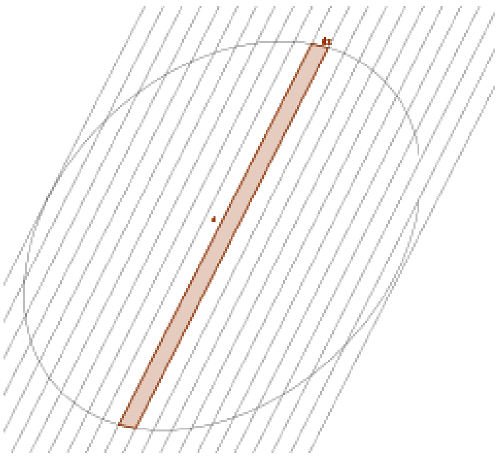
$$\frac{1}{6}\left(0+4(\frac{3}{4})+2+4(\frac{3}{4})+0\right)=\frac{1}{6}(8)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Com'è ovvio trattandosi di una parabola, il risultato è esatto.

8 - L'INTEGRALE DEFINITO

8.1 Ma l'area esatta qual è?

La formula dei trapezi e quella di Simpson forniscono valori approssimati dell'area che sono tanto migliori quanto maggiore è il numero di trapezi, e quindi tanto più piccolo è lo spessore delle *fette*.



Una superficie tagliata a fette

Intuitivamente allora l'area esatta sarà quella calcolata con infinite fette di spessore infinitesimo. Nel disegno a destra ovvia-mente si sono potute disegnare solo un nume-ro finito di rette.

Ogni fetta essendo infinitamente piccola potrà essere approssimata con un rettangolo di base infinitesima ***db*** e altezza pari alla lunghezza ***a*** della fetta (che è finita); l'area infinitesima vale quindi:

$$dA = a\,db$$

L'area sarà quindi la somma delle infinite aree infinitesime *dA*; le aree infinitesime, che potrebbe scriversi così:

$$A = S(a\,db)$$

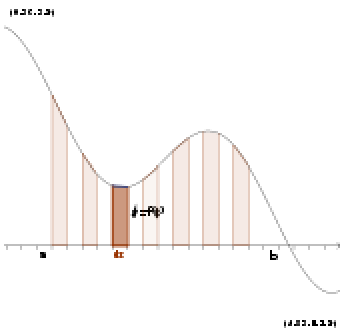
dove la S maiuscola sta appunto per somma.

Questa è precisamente la notazione inventata da Leibniz che però stilizzo la *S* nel simbolo ∫. È questa l'origine del simbolo di integrale. In seguito Jakob Bernoulli introdusse la parola *integrale* per intendere la *somma integrale* di infinite quantità infinitesime. Si scriverà quindi:

$$A = \int a\,db$$

8.2 L'area sotto una funzione

Se vogliamo calcolare l'area sottesa a una funzione matematica nel diagramma cartesiano possiamo ripetere l'identico ragionamento di sopra, come si vede nel disegno che segue, dove la base del rettangolo infinitesimo è *dx* mentre l'altezza altro non è che *y = f(x)*.



Una funzione "affettata"

L'area sottesa dalla funzione *f(x)* tra i due valori estremi di ***x***, che indichiamo con ***a*** e ***b*** sarà allora:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

da intendersi come la somma degli infiniti rettangoli infinitesimi di area *f(x)dx*.

Tutto questo in teoria, ma in pratica non è possibile suddividere realmente un'area in un numero infinito di fette, e allora il discorso può apparire puramente teorico.

La chiave di volta di tutto sta in un teorema enunciato per la prima volta da Isaac Barrow[18] che dimostra che esiste una funzione che permette di calcolare l'area esatta, e che questa funzione ha per derivata *f(x)*.

Questo teorema si è meritato il nome di teorema fondamentale dell'analisi proprio perché stabilisce una relazione fino allora insospettata tra derivate (tangenti a una curva) e integrali (aree delimitate da una curva).

Questo teorema è noto anche come **teorema di Barrow o di Torricelli-Barrow**[19].

18 ISAAC BARROW fu insegnante di matematica a Cambridge nel Seicento ed ebbe tra i suoi studenti Isaac Newton.

19 Questo nome doppio è usato in Italia da quando all'inizio del Novecento furono ritrovate alcune carte di Torricelli che mostrano come anche il matematico italiano fosse giunto a un risultato equivalente a quello di Barrow.

8.3 Il teorema fondamentale dell'analisi

Il problema è quello di calcolare l'area sottesa a una funzione *y=f(x)*, detta la funzione primitiva. Per area sottesa si intende l'area compresa tra la funzione f(x), l'asse delle x e due rette verticali in corrispondenza di due valori di x detti gli estremi dell'area. Si veda il disegno che segue, dove l'area sottesa è quella colorata in arancio.

Non è difficile definire una funzione area ***F(x)***; per esempio l'area compresa tra la funzione, gli assi delle *x* e delle y e la retta con ascissa uguale a *x*, è chiaramente una funzione di *x*[20]. In figura, due esempi, l'area tra 0 e *a* è F(*a*), l'area tra 0 e *b* è F(*b*).

Ovviamente F(0) = 0. Le aree a sinistra dell'asse delle y si considerano negative.

Una volta definita questa funzione, il teorema fondamentale afferma semplicemente che:

La funzione area F(x) ha per derivata la funzione f(x).

Proviamo infatti a calcolare la derivata di F(x) usando il procedimento di Leibniz:

$$y = F(x)$$

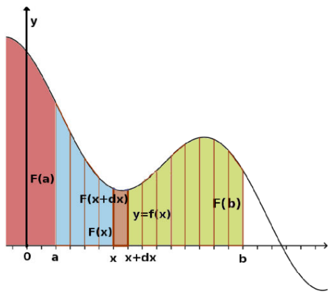
$$y + dy = F(x + dx)$$

e quindi sostituendo la prima nella seconda:

$$F(x) + dy = F(x + dx)$$

$$dy = F(x + dx) - F(x)$$

ma osservando il disegno sopra è evidente che la differenza *F(x + dx) - F(x)* non è altro che il rettangolino infinitesimo di base *dx* e altezza *f(x)*.



La funzione area F(x)

In simboli è *F(x + dx) - F(x) = f(x).dx* e quindi segue che:

20 Naturalmente si potrebbe prendere anche l'area a partire da una qualsiasi retta verticale *x = c* al posto dell'asse delle *y*. In questo caso la differenza sarà l'area compresa tra *x = 0* e *x = c* In altre parole la funzione area è definita a meno di una costante.

$$dy = f(x)\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Dunque la derivata della funzione area non è altro che la funzione di partenza ed *F(x)* è l'integrale indefinito di *x* ed è quindi dato a meno di una costante che è poi l'area di cui alla nota in fondo a pag. 77.
Questo vuol dire che tutte le volte che siamo in grado di calcolare l'integrale indefinito di una funzione, allora siamo in grado di calcolare l'area sottesa alla curva in un qualsiasi intervallo [a, b].
In questo senso è possibile calcolare l'area esatta sottesa da una curva. Se però la funzione non è integrabile elementarmente, nel senso che non è la derivata di alcuna funzione elementare, si deve tornare all'uso dei metodi numerici per approssimarla.

8.4 L'integrale definito

L'area sotto la curva si chiama ***integrale definito*** della funzione e si indica così:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

e si legge letteralmente: *integrale da **a** a **b** di effe di x in deics*.

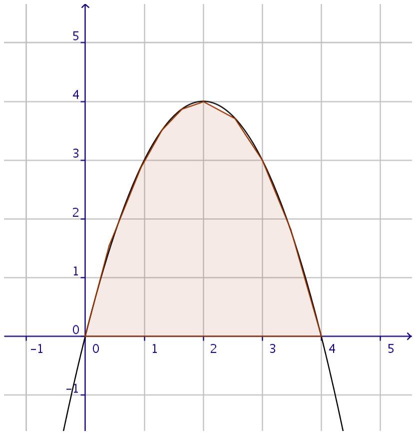
N.B. La differenza *F(a) − F(b)* ovviamente è la stessa anche se si prende uno qualsiasi degli integrali *F(x)+c*, infatti nella sottrazione le due costanti c si annullerebbero a vicenda. Per questo motivo nel calcolo dell'integrale indefinito non si fa mai uso della costante di integrazione.

8.4.a Un primo esempio: calcolo dell'area sotto una parabola

Come primo esempio di calcolo di un'area usando l'integrale definito proviamo a calcolare l'area sottesa alla parabola:

$$y=-x^2+4x$$

tra x=0 e x=4. L'area è quella colorata nella figura.



Si tratta di calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^4 -x^2+4x\,dx$$

Una funzione area F(x) è allora l'integrale indefinito di $-x^2 + 4x$ che in base alle regole di integrazione viste in precedenza vale:

$$F(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2$$

In base al teorema fondamentale allora è:

$$\int_0^4 -x^2+4x\,dx=F(4)-F(0)=\ldots$$

$$[-\frac{4^3}{3}+2.4^2]-[-\frac{0}{3}+2.0]=\ldots$$

$$[-\frac{64}{3}+32]-0=\frac{32}{3}$$

L'area vale quindi 32/3, in decimali poco meno di 10, risultato che ben corrisponde alla figura dove è facile stimare il numero di quadretti dell'area pari appunto a circa 10.

Notazione

Nella pratica è abituale invece di scrivere F(4) – F(0) usare le parentesi quadre (o anche barre verticali) con gli estremi scritti come per l'integrale; l'esempio precedente viene quindi ad essere scritto così:

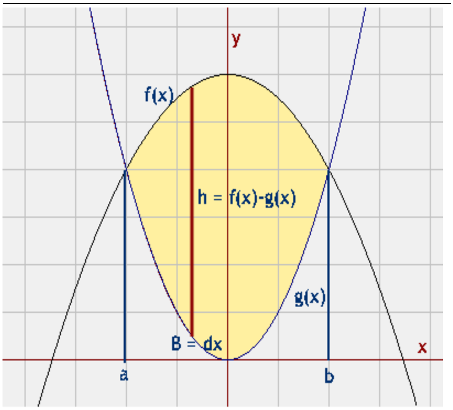
$$\int_0^4 -x^2+4x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=\left[-\frac{64}{3}+32\right]-0=\frac{32}{3}$$

Esercizi:

Calcolare le seguenti aree facendo anche il disegno e controllando il risultato sul grafico.

1. Area sotto la parabola $y=x^2-4x+3$ tra 1 e 3 e cioè:
$$\int_1^3 x^2-4x+3\,dx$$
2. Area sotto la cubica $y=x^3-4x$ tra x=0 e x= +2 e cioè:
$$\int_0^2 x^3-4x\,dx$$
3. Area sotto la quartica $y=x^4-4x^2$ tra x=0 e x= +2 e cioè:
$$\int_0^2 x^4-4x^2\,dx$$

8.5 Area tra due curve



Area tra due curve

Gli integrali oltre che a calcolare l'area sottesa a una curva tra due estremi, permettono di calcolare l'area delimitata da una o più curve. Consideriamo la figura a lato e l'area compresa tra le due curve di equazione *y* = *f(x)* e *y* = *g(x)*; l'area può vedersi come la somma infinita dei rettangolini infinite-

simi, come quello indica-to in figura in color rosso scuro.
Questi rettangolini hanno base infinitesima *dx* e altezza data dalla differenza tra la curva superiore *f(x)* e quella inferiore *g(x)*. L'area totale è allora data dall'integrale:

$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$$

Il calcolo di *a* e *b* richiede naturalmente la soluzione del sistema tra le due funzioni, ovvero la soluzione dell'equazione *f(x) - g(x) = 0*. La difficoltà di questa equazione può naturalmente essere molto varia, da una banale equazione algebrica di secondo grado, a equazioni di grado superiore o trascendenti.

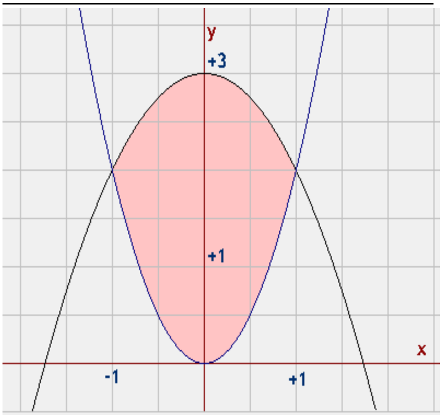
8.6 Esempi

8.6.a Area tra due parabole

Calcolare l'area compresa tra le seguenti funzioni:

$$y=2x^2$$
$$y=3-x^2$$

Si tratta di due parabole. La prima ha vertice nell'origine, e concavità verso l'alto; la seconda ha vertice in (0;3), e concavità verso il basso.
Per trovare i punti comuni tra le due curve si deve risolvere il sistema; eliminando la y si ha subito un'equazione di secondo grado:



Area tra le due parabole

$$2x^2=3-x^2$$
$$2x^2-3+x^2=0$$
$$3x^2-3=0$$

Questa equazione si può risolvere anche senza la classica formuletta, p.es. scomponendo il polinomio a primo membro:

$$3x^2-3=0$$
$$3(x^2-1)=0$$
$$3(x-1)(x+1)=0$$

Dunque l'equazione ha due soluzioni, x = -1 e x = 1 come è evidente anche dal disegno. I due punti di intersezione sono A(-1;2) e B(+1;2).

Per calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve occorre calcolare l'integrale definito tra -1 e 1 della differenza tra la parabola superiore (3 – x^2) e quella inferiore ($2x^2$):

$$\int_{-1}^{1} 3-x^2-2x^2\,dx=$$
$$\int_{-1}^{1} 3-3x^2\,dx=$$
$$[3x-x^3]_{-1}^{+1}=$$
$$(3-1)-(-3+1)=2+2=4$$

L'area tra le due curve vale quindi 4.

8.6.b Area tra una cubica e una retta

Calcolare l'area compresa tra le seguenti funzioni:

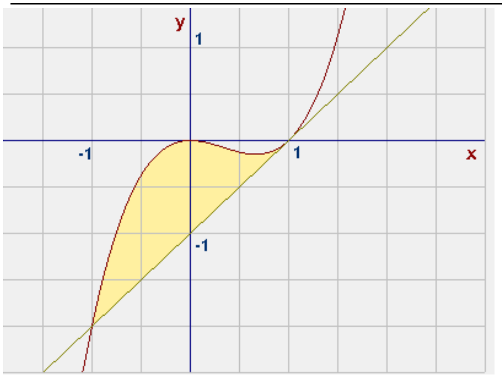
$$y=x^3-x^2$$
$$y=x-1$$

Si tratta di una cubica e di una retta. La cubica può scriversi anche come

$$y=x^2(x-1)$$

e quindi ha due zeri, uno doppio (tangente all'asse delle *x*) *x = 0* e uno semplice *x = +1*;

Per trovare i punti



Area tra una cubica e una retta

comuni tra le due curve si deve risolvere il sistema; eliminando la y si ha subito un'equazione algebrica di terzo grado:

$$x^3-x^2=x-1$$
$$x^3-x^2-x+1=0$$

Questa equazione si può risolvere in diversi modi; p.es. scomponendo a fattor parziale il polinomio a primo membro:

$$x^2(x-1)-(x-1)=0$$
$$(x^2-1)(x-1)=0$$
$$(x+1)(x-1)(x-1)=0$$
$$(x+1)(x-1)^2=0$$

Altra possibilità: avendo riconosciuto che il polinomio si annulla per *x = 1*, dividerlo, in base al teorema di Ruffini, per *(x - 1)* ottenendo un polinomio (e quindi un'equazione) di secondo grado.

Dunque l'equazione ha due soluzioni, una semplice *x = -1* e una doppia *x = 1*. Questo vuole dire che per *x = 1* le due curve hanno non solo lo stesso valore ma anche la stessa pendenza (derivata prima); infatti la derivata della cubica è $3x^2 - 2x$ che per *x = 1*, vale *3 − 2 = 1*, che è anche il coefficiente angolare della retta.

Si veda anche il disegno precedente.

Vi è quindi una sola regione di piano delimitata dalle due curve; per calcolarne l'area occorre calcolare l'integrale definito tra -1 e 1 della differenza tra la cubica e la retta:

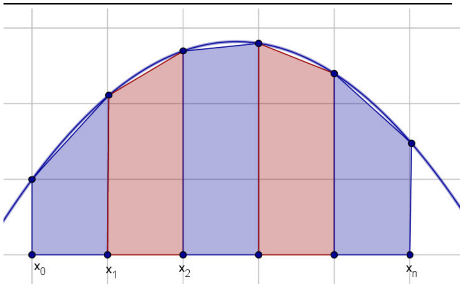
$$\int_{-1}^{1} x^3-x^2-x+1\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{+1}=$$
$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

L'area tra le due curve vale quindi 4/3.

9 - Calcolo approssimato di integrali

Riprendiamo ora le formule per il calcolo approssimato delle aree che come si capisce tornano utili anche per il calcolo approssimato degli integrali definiti.

9.1 Integrazione con la formula dei trapezi



Approssimare un'area con n trapezi

La formula dei trapezi è utile anche per il calcolo dell'integrale definito di una funzione in un intervallo, alla sola condizione di saper calcolare la funzione in tutto l'intervallo.
L'intervallo [a, b] viene diviso in n intervalli di ampiezza h, dove x_0 = a e x_n = b La formula assume la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

o anche, portando il fattore ½ dentro la parentesi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Anche qQuesta formula può facilmente tradursi in un algoritmo in un qualsiasi linguaggio di programmazione.

9.1.a Esempio con la formula dei trapezi.

Dobbiamo calcolare l'integrale:

$$\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx$$

che essendo facile trovare la primitiva che è $x-\frac{x^3}{3}$ si calcola come segue:

$$\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

L'area esatta è quindi 4/3.
Come primo tentativo dividiamo l'area in quattro trapezi con intervallo di 0,5.
I trapezi hanno tutti la stessa altezza 0,5; le basi si hanno calcolando la funzione per x = -1; x = -0,5; x= 0; x = 0,5; x = 1.
Sostituendo nella formula dei trapezi si ha:

$$\frac{h}{2}\left(f(-1)+2\mathrm{f}(-\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(0)+2\mathrm{f}(\frac{1}{2})+f(0)\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(0+2(\frac{3}{4})+2+2(\frac{3}{4})+0\right)=\frac{1}{4}(5)=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Con quattro trapezi si ottiene il valore 1,25 di poco inferiore al vero 1,333...; che l'errore debba essere per difetto lo si vede dal disegno: i trapezi sono approssimazioni per difetto dei trapezoidi delimitati dalla parabola.
Per avere una maggiore precisione con i trapezi bisogna aumentare il numero degli intervalli; per esempio se lo raddoppiamo portandolo a otto trapezi, si ha:

$$\frac{h}{2}\left(f(-1)+2\mathrm{f}(-\frac{3}{4})+2\mathrm{f}(-\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(-\frac{1}{4})+2\mathrm{f}(0)+2\mathrm{f}(\frac{1}{4})+2\mathrm{f}(\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(\frac{3}{4})+f(0)\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(0+2\cdot\frac{7}{16}+2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{15}{16}+2+2\cdot\frac{15}{16}+2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{7}{16}+0\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{168}{16}=\frac{21}{16}=1{,}3125$$

L'approssimazione è ora 1,3125 già più vicina al vero 1,333...
La convergenza della formula dei trapezi è piuttosto lenta, ma inserendola in un algoritmo per computer permette comunque di approssimare il risultato, se pure con un elevato numero di iterazioni.

9.2 Integrazione con la formula di Simpson

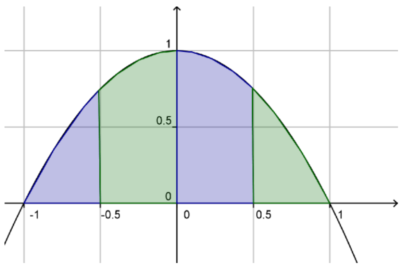
La formula di Simpson per gli integrali è:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

La formula richiede che l'intervallo [a, b] sia diviso in un numero pari di intervallini di ampiezza h, ed è ovviamente esatta per i polinomi di secondo grado, e un po' meno ovviamente esatta anche per quelli di terzo grado.
La formula può facilmente tradursi in un algoritmo in un qualsiasi linguaggio di programmazione.

9.3 Esempi con la formula di Simpson.

1. Riprendiamo il problema precedente: calcolare l'area sottesa alla funzione $y=1-x^2$ tra i suoi due zeri, x= -1 e x = +1.
Si tratta ancora della parabola in figura e l'area vale sempre 4/3.
Come primo tentativo dividiamo l'area in quattro trapezoidi con intervallo di 0,5.
I trapezi hanno tutti la stessa altezza 0,5; le basi si hanno calcolando la funzione per x = -1; x = -0,5; x= 0; x = 0,5; x = 1.
Sostituendo nella formula di Simpson si ha:



La parabola in oggetto

$$\frac{h}{3}\left(f(-1)+4\mathrm{f}(-\frac{1}{2})+2\mathrm{f}(0)+4\mathrm{f}(\frac{1}{2})+f(0)\right)$$

$$\frac{1}{6}\left(0+4(\frac{3}{4})+2+4(\frac{3}{4})+0\right)=\frac{1}{6}(8)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Com'è ovvio trattandosi di una parabola, si tratta di un risultato esatto.

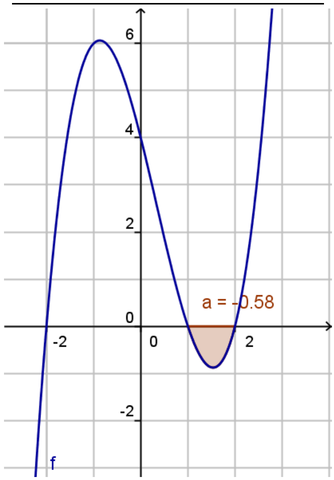
2. Come secondo esempio consideriamo la cubica:

$$y=x^3-x^2-4x+4$$

e calcoliamo l'area compresa tra 1 e 2:

$$\int_1^2 x^3-x^2-4x+4\,dx$$

Usiamo solo due trapezoidi di altezza ½ tra 1, 3/2 e 2.



Area sotto una cubica

$$\frac{h}{3}(f(1)+4f(\frac{3}{2})+f(2))=$$

$$\frac{1}{6}(0+4(\frac{27}{8}-\frac{9}{4}-6+4)+0)=\frac{1}{6}(-\frac{7}{2})=$$

$$-\frac{7}{12}\approx-0{,}5833333...$$

Il risultato è esatto anche in questo caso; di seguito riportiamo il calcolo del relativo integrale definito.

$$\int_1^2 x^3-x^2-4x+4\,dx=$$

$$[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-2x^2+4\mathrm{x}]_1^2=$$

$$(4-\frac{8}{3}-8+8)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-2+4)=$$

$$\frac{4}{3}-\frac{23}{12}=-\frac{7}{12}$$

Come si vede già in questo caso il calcolo con la formula di Simpson è di complessità paragonabile a quello dell'integrale; per integrali più complessi diventa sempre più conveniente l'uso della formula di Simpson, che si può facilmente tradurre in un algoritmo in un qualsiasi linguaggio di programmazione.

10 - NSA INFINITESIMI E NUMERI IPERREALI

10.1 Le obiezioni di George Berkeley

Nel 1734 George Berkeley filosofo empirista irlandese e vescovo anglicano pubblicò un saggio intitolato "*The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*" nel quale criticava pesantemente il calcolo infinitesimale muovendo la più temibile accusa per una teoria matematica, quella di essere contraddittoria.

Il calcolo della derivata della funzione $y = x^2$ visto nella prima parte (par. 2.3) si presta bene per illustrare questa accusa; Berkeley osserva che Leibniz considera dx diverso da zero nel momento in cui divide tutto per dx (cosa illecita se $dx = 0$), e alla fine invece considera di fatto $dx = 0$ nel momento in cui lo elimina dalla derivata. In definitiva gli infinitesimi sono al tempo stesso uguali a zero e diversi da zero, e questa è appunto una contraddizione logica. Per Berkeley dunque il calcolo era intrinsecamente contraddittorio e gli infinitesimi erano definiti spregiativamente *ghosts of departed quantities*, fantasmi di quantità defunte.

10.2 La prima rifondazione dell'Analisi

In realtà il calcolo infinitesimale sopravvisse tranquillamente alle critiche del Berleley. Strumento fondamentale e insostituibile per fisici e ingegneri il calcolo funzionava troppo bene per poter essere buttato tra i rifiuti della matematica.

Pure quelle critiche avevano un indubbio fondamento e alla fine nell'Ottocento si arrivò a una prima rifondazione dell'analisi con una decisione radicale che in pratica dava atto alla maledi-zione di Berkeley: gli infinitesimi, come spettri inconsistenti, furono banditi dalla matematica; derivate e integrali furono ridefiniti basandosi non più sul concetto di infinitesimo, ma su quello di limite (vedi parte 12 di questo volume).

Principali responsabili di questa rifondazione del calcolo non più infinitesimale, furono un matematico francese Augustin-Louis Cauchy e uno tedesco Karl Weierstrass. L'impostazione Cauchy-Weierstrass è da allora diventata quella standard dell'analisi matematica; le obiezioni di Berkeley erano finalmente superate ma ad un prezzo non lieve; tutte le definizioni e dimostrazioni di questa nuova analisi sono molto più complicate e astruse di quella di Leibniz-Newton. Ma non sembrava esserci altra scelta per salvaguardare la consistenza logica dell'analisi.

10.3 Abraham Robinson riabilita gli infinitesimi

Ma la storia non era (e non è mai) finita e infatti negli anni tra il 1960 e il 1966 il logico matematico Abraham Robinson, nostalgico degli infinitesimi di Leibniz, trovò lo strumento per dare un fondamento logicamente solido agli infinitesimi. Lo strumento è un teorema della logica matematica detto *teorema di compattezza proposizionale (predicativa)*[21] che dice:

Se **K** è un insieme di proposizioni (*predicati*) tali che ogni sottoinsieme finito di **K** è consistente, allora anche **K** è consistente.

Esula dagli scopi di questo libro una dimostrazione di questo teorema[22]: basti ricordare che *consistente* in logica vuol dire senza contraddizioni, dunque un insieme **K** consistente di proposizioni è un insieme di proposizioni che possono essere prese tutte per vere senza dare luogo a contraddizioni. In logica questa situazione viene riassunta dicendo che **K** ammette almeno un modello nel quale le proposizioni sono tutte vere.

Applicando questo teorema ai numeri naturali e ai numeri reali si dimostra proprio che è possibile definire un modello consistente per i numeri infinitesimi e per i numeri infiniti.

21 Se si parla di **proposizioni** si ha il teorema di *compattezza proposizionale*, se si parla di **predicati** (proposizioni con variabili) si parla di teorema di *compattezza predicativa*.

22 Si veda per esempio A.ROBINSON, *Non Standard Analysis*, Princeton 1966, in italiano V.MANCA, *Logica matematica*, Boringhieri 2001.

10.4 Numeri infinitamente grandi

Cominciamo con l'insieme dei numeri naturali **N**.
Consideriamo il seguente insieme **K** di infinite proposizioni:

$\exists x \in N : x > 0$
$\exists x \in N : x > 1$
$\exists x \in N : x > 2$
$\exists x \in N : x > 3$

…

In N non esiste alcun numero *x* che le renda vere tutte contemporaneamente. Un tale numero sarebbe infatti maggiore di ogni numero intero.
Ma se consideriamo un qualsiasi sottoinsieme finito di **K** per esempio

$\exists x \in N : x > 0$
$\exists x \in N : x > 2$

allora il numero x esiste in **N**, infatti basta prendere *x* > 2.
Allora per il teorema di compattezza predicativa deve esistere un modello (detto modello *non standard*) anche per **K** in altre parole un insieme di numeri per i quali anche **K** è vero. Questo insieme che è un'estensione di **N**, viene indicato con **N*.**
In **N*** dunque ci devono essere numeri che soddisfanno tutto **K** numeri quindi che sono maggiori di ogni numero naturale.
Questi numeri sono detti numeri infinitamente gradi o brevemente infiniti e indicati con la lettera greca ω (omega) per analogia con i numeri ordinali di Cantor.
Un ragionamento del tutto analogo può essere fatto per l'insieme dei numeri reali **R** che ammetterà un ampliamento **R*** che comprende anche i numeri infiniti ω, numeri cioè maggiori di ogni numero reale.

10.5 Numeri infinitamente piccoli

Esiste un altro possibile ampliamento di **R** che prende in considerazione questo insieme **K** di infiniti predicati:

$$\exists x \in R : 0 < x < 1$$

$$\exists x \in R : 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$\exists x \in R : 0 < x < \frac{1}{3}$$

...

Anche qui in R non esiste alcun numero che renda vere tutte queste proposizioni contemporaneamente. Un tale numero infatti sarebbe al tempo stesso maggiore di 0 e minore di ogni numero della forma 1/N, cosa esclusa dal postulato di Archimede.

Un qualsiasi sottoinsieme di **K** è però vero, per esempio:

$$\exists x \in R : 0 < x < 1$$

$$\exists x \in R : 0 < x < \frac{1}{3}$$

$$\exists x \in R : 0 < x < \frac{1}{5}$$

è senz'altro vero, basta per esempio prendere *x = 1/6* o comunque minore di un quinto.

E anche in questo caso il teorema di compattezza ci dice che deve esistere un insieme ampliato **R*** all'interno del quale anche l'ìntero **K** può essere soddisfatto.

In altre parole in **R*** esisteranno numeri che sono maggiori di zero e al tempo stesso minori e diversi di ogni numero della forma 1/N.

Questi numeri si chiamano numeri *infinitamente piccoli* o brevemente *infinitesimi*.

Ecco quindi che gli infinitesimi di Leibniz, sbeffeggiati da Berkeley nel Settecento e cacciati dal mondo della matematica nell'Ottocento, ritornano con tutti gli onori alla fine del Novecento.

Infintesimi e infiniti sono di fatto gli uni i reciproci degli altri.

Gli elementi di **R*** vengono chiamati numeri ***iperreali***; l'Analisi che ne deriva si chiama Analisi Non Standard (inglese *Non-standard Analysis* abbreviato spesso in NSA):
La cosa più importante però è che il teorema di compattezza assicura il principio di trasferimento caro a Leibniz: tutte le proprietà dell'algebra ordinaria continuano a valere anche in R* e quindi anche per infinitesimi e numeri reali.

10.6 Notazione

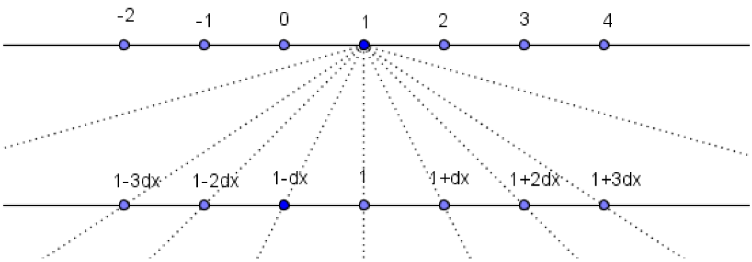
Il ritorno dell'infinitesimo dagli anni '60 ha generato una certa confusione sui simboli usati per rappresentare gli infinitesimi. Alcuni autori usano Δx invece del *dx* di Leibniz, altri usano lettere greche minuscole come ε o η; altri ancora usano uno strano simbolo formato da due cerchietti concentrici detto *hype*.
Come regola ho preferito mantenere la notazione di Leibniz che mi sembra ancora la più espressiva soprattutto quando è importante il riferimento alla variabile che viene *differenziata: dx* per intendere *variazione infinitesima* della *x*. Quando questo non è importante si è usata la lettera ε tradizionalmente legata all'idea di numero molto piccolo.
Situazione simile per i numeri infiniti, reciproci degli infinitesimi, che si tratteranno più avanti; il Keisler usa la lettera H, altri la ω; in questo testo useremo quest'ultima, ω per numero infinitamente grande.

10.7 I numeri iperreali

Abbiamo detto che l'insieme ampliato **R°** è detto insieme dei numeri iperreali. Un numero iperreale è per definizione la somma di un numero reale (detto parte standard) e di un numero infinitesimo, p.es.:

$1+dx$ 1 è la parte standard, dx la parte infinitesima.
$2+2dx$ 2 è la parte standard, 2dx la parte infinitesima.
$a+b\,dx$ 3 a è la parte standard, bdx la parte infinitesima.

Un modo efficace di visualizzare gli iperreali é quello dello zoom infinito: ogni numero della retta iperreale è circondato da un microscopico intorno di infinitesimi.



Zoom infinito sugli infinitesimi vicini al numero 1. La seconda riga è quella dei numeri del tipo $1 \pm dx$

Nel disegno a lato il numero 1 è circondato da infiniti numeri iperreali che hanno 1 come parte standard, p.es. 1-2dx, 1-dx, 1, 1+dx, 1+2dx; per mostrarli si è immaginato di usare uno zoom che espande l'intorno infinitesimo di 1 in una retta.
Robinson chiamò *monade* questo insieme di numeri iperreali intorno a un reale, in onore di Leibniz che aveva posto le monadi al centro della sua filosofia.
Il prodotto di un reale e un infinitesimo (p.es. *2dx*) è un infinitesimo, il prodotto di due infinitesimi (p.es. $(dx)^2$) è un infinitesimo che chiameremo del secondo ordine.
Nel prossimo paragrafo uno specchietto riassuntivo delle operazioni con i numeri iperreali.

10.8 Aritmetica dei numeri iperreali

Operazioni elementari	
Somma	$(a+b\,dx)(c+d\,dx)=$ $(a+c)+(b+a)dx$ $(2+3\,dx)+(4-dx)=$ $6+2\,dx$
Prodotto	$(a+b\,dx)(c+d\,dx)=$ $ac+(bc+ad)\,dx+dx^2$ $(2+3\,dx)(4-dx)=$ $8+10\,dx+3\,dx^2$
Quoziente	$\frac{a+b\,dx}{c+d\,dx}=\dots$ $\frac{(a+b\,dx)(c-d\,dx)}{c^2-d^2\,dx^2}=\dots$ $\frac{ac+(bc-ad)\,dx-bd\,dx^2}{c^2-d^2\,dx^2}$ $st\left(\frac{2+3\,dy}{3+2\,dx}\right)=\frac{2}{3}$

10.9 Numeri infinitamente vicini

Un concetto collegato a quello di infinitesimo è quello di *infinitamente vicino*. Due numeri x_0 e x_1 si dicono infinitamente prossimi se differiscono per un infinitesimo. In simboli:

$$x_1 \simeq x_0 \Leftrightarrow |x_1 - x_0| = dx$$

Il concetto di vicinanza infinita è utile per definire il concetto di continuità e di funzione continua.

10.10 La funzione parte standard

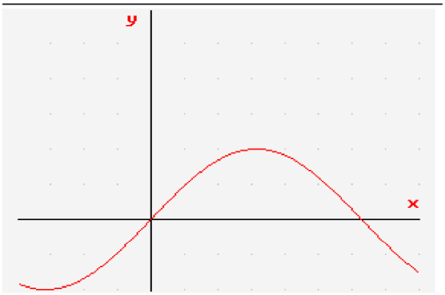
Nell'analisi non standard ha importanza chiave, per la definizione di derivata, la funzione *st*(z), detta *parte standard*, che ad un qualsiasi numero iperreale z associa la sua parte reale, p.es.
st(1 + dx) = 1
st(2 + 2dx) = 2
La parte standard gode di alcune semplici proprietà che sono riportate nel seguente specchietto.
Un caso particolare è quello del quoziente con denominatore infinitesimo (parte reale nulla) e numeratore non infinitesimo (parte reale non nulla); in questo conveniamo che la parte standard sia un numero infinito e che il segno sia quello ottenuto, secondo l'ordinaria regola dei segni, tra la parte standard del numeratore e il segno dell'infinitesimo di primo ordine al denominatore.

Proprietà		Esempio
Somma	$st(x+dx+y+dy)=$ $st(x+dx)+st(y+dy)=x+y$	$st(2+3\mathrm{dx}+3-2\mathrm{dx})=5$
Prodotto	$st((x+dx)(y+dy))=$ $st(x+dx).st(y+dy)=xy$	$st((2+3dx)*(3-2dx))=6$
Quoziente	$st\left(\frac{y+dy}{x+dx}\right)=\frac{st(y+dy)}{st(x+dx)}=\frac{y}{x}$	$st\left(\frac{2+3dy}{3+2dx}\right)=\frac{2}{3}$
Quoziente infinito	$st\left(\frac{y+dy}{dx}\right)=\pm\omega$ *[il segno dipende dal segno di y e da quello di dx]*	$st\left(\frac{2+3dy}{0+2dx}\right)=+\omega$ $st\left(\frac{2+3dy}{0-2dx}\right)=-\omega$ $st\left(\frac{-2+3dy}{0+2dx}\right)=-\omega$ $st\left(\frac{-2+3dy}{0-2dx}\right)=+\omega$

10.11 Funzioni continue

Tra le funzioni di variabile reale hanno particolare importanza le funzioni continue.

Intuitivamente una funzione y = f(x) si dice continua se è possibile disegnarne il grafico senza *staccare* la matita dal foglio di carta.



Funzione continua

Da questa definizione intuitiva si ricavano definizioni più rigorose; non staccare mai la matita dalla carta

equivale a dire che a ogni minimo incremento nella direzione dell'asse delle x deve corrispondere un altrettanto minimo incremento nella direzione dell'asse y.
Se alla parola *minimo* sostituiamo quella di infinitesimo otteniamo questa definizione:

Una funzione f(x) si dice continua (a destra) in un punto P(x;y) se incrementando x di un infinitesimo dx, anche la y varia al massimo di un infinitesimo dy.

In simboli:

$$|f(x+dx)-f(x)|=dy$$

o anche:

$$st(f(x+dx)-f(x))=0$$

o ancora usando il concetto di infinitamente vicino:

$$x \simeq x_1 \Rightarrow f(x) \simeq f(x_1)$$

Così definita la continuità è a destra (per valori maggiori di *x*). Per definire una continuità a sinistra, basta sostituire *incrementando* con *decrementando*:

Una funzione f(x) si dice continua (a sinistra) in un punto P(x;y) se decrementando x di un infinitesimo dx, anche la y varia al massimo di di un infinitesimo dy.

In simboli:

$$|f(x)-f(x-dx)|=dy$$

o anche:

$$st(f(x)-f(x-dx))=0$$

o ancora usando il concetto di infinitamente vicino:

$$x \simeq x_1 \Rightarrow f(x) \simeq f(x_1)$$

Una funzione che non soddisfa questa condizione si dice discontinua nel punto P. Si dice anche che in P c'è una discontinuità.

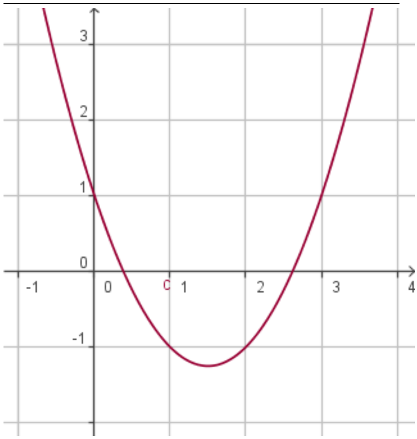
10.11.a Esempio: una funzione continua.

Una qualsiasi funzione algebrica intera (polinomio) *P(x)* è continua in ogni suo punto. Infatti *P(x+dx) - P(x)* è sempre infinitesima.
Vediamo come esempio un polinomio di secondo grado:

$$P(x)=x^2-3x+1$$

che è poi una parabola (grafico a lato).

Applicando il criterio appena visto si ha:



Una funzione continua: la parabola

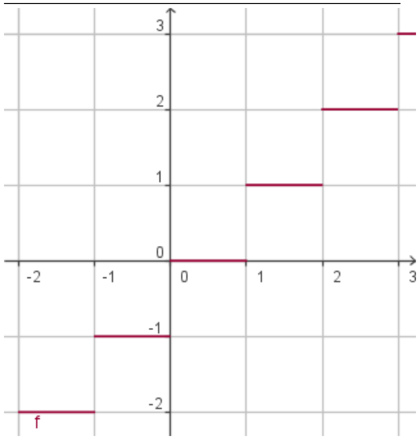
$$((x+dx)^2-3(x+dx)+1)-(x^2-3x+1)=\ldots$$
$$\cancel{x^2}+2x\,dx+dx^2\cancel{-3x}-3\,dx\cancel{+1}-\cancel{x^2}\cancel{+3x}\cancel{-1}=\ldots$$

$$2x\,dx-3\,dx+dx^2=(2x-3)\,dx+dx^2$$

che è appunto un infinitesimo.

10.11.b Controesempio 1: una funzione discontinua

Come controesempio consideriamo la funzione *y = floor(x)* definita come il massimo intero minore di x (*floor* in inglese vuol dire pavimento); per i numeri positivi coincide con la funzione parte intera di un numero reale.



La funzione floor(x) (pavimento)

Questa funzione è continua per tutti i valori decimali di x, p.es. Per x = 1,5 si ha

floor(1,5 + dx) - floor(1,5) = 1 - 1 = 0

dunque a un incremento infinitesimo della x corrisponde un incremento nullo della y e la funzione è continua.

Vediamo cosa accade per un valore intero, p.es. per x = 1:

floor(1 + dx) - floor(1) = 1 - 1 = 0

e la funzione è continua a destra di 1, ma a sinistra

floor(1) - floor(1-dx) = 1 - 0 = 1

che non è un infinitesimo; in effetti il valore 1 esprime il fatto che la funzione fa un salto di un'unità per x = 1. La funzione è discontinua a sinistra di x = 1.

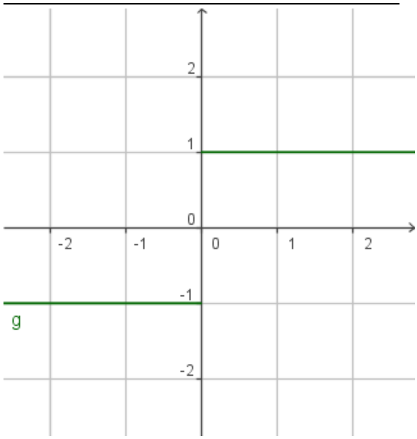
Analogamente per ogni altro valore intero. L'aspetto del grafico della funzione è quello di una gradinata.

10.11.c Controesempio 2: la funzione segno

Altro controesempio quello della funzione Segno (in inglese *Sign* o *Sgn*), che per definizione vale +1 per argomenti positivi -1 per argomenti negativi, in simboli:

f(x) = +1 *per x > 0*
f(x) = -1 *per x < 0*
indefinita *per x = 0*

Nel punto P(0;0) (origine) la funzione non è ovviamente definita, dato che zero non è né positivo né negativo.
Qui la discontinuità consiste nel fatto che passando da argomenti negativi a positivi si ha un salto di (1-(-1)) = 2. Inoltre c'è un *buco* per x=0.
Una domanda che sorge spontanea è: è possibile completare questa funzione rendendola continua?



La funzione Segno

Abbiamo tre possibilità:
1. porre *Sign*(0) = +1
2. porre *Sign*(0) = -1
3. porre *Sign*(0) = a
con a diverso da -1 e +1.

Nel primo caso abbiamo:

Sign(0+dx)-Sign(0) = 1-1 = 0

Sign(0) - *Sign(0-dx)* = 1 - (-1)= 2

dunque la funzione è continua a destra e discontinua a sinistra. Intuitivamente questo vuol dire che la funzione per passare da valori negativi a valori positivi deve fare un salto di altezza 2.
Nel secondo caso invece:

Sign(0+dx) - Sign(0) = 1 - (-1) = 1+1 = 2
Sign(0-dx) - Sign(0) = -1 - (-1) = 0

e dunque la funzione è continua a sinistra ma non a destra.

Se poi prendiamo un qualsiasi altro numero per esempio *Sign(0) = 0:*

Sign(0+dx) - Sign(0) = 1 - 0 = 1
Sign(0-dx) - Sign(0) = -1 - 0 = -1

e la funzione viene ad essere discontinua sia a destra sia a sinistra. Intuitivamente questo vuol dire che la funzione per passare da valori negativi a valori positivi deve fare due salti.
In questo caso non c'è dunque alcun modo di eliminare completamente la discontinuità che viene per questo detta ***non eliminabile***.

10.11.d Controesempio 3: una funzione algebrica

Un altro esempio di discontinuità è dato da questa funzione:

$$y=\frac{x^2-1}{x+1}$$

La funzione è definita solo quando il denominatore è diverso da zero, dunque per $x\neq-1$
La funzione può scriversi anche, moltiplicando tutto per *(x+1):*
$(x+1)y=(x-1)(x+1)$ $(x+1)y-(x+1)(x-1)=0$ $(x+1)(y-x+1)=0$
D'altra parte la frazione è semplificabile:

$$y=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}=x-1$$

dunque il grafico si riduce ad una retta; però la semplificazione non è valida per x = -1 dunque la funzione di partenza può così definirsi:

$$f(x)=x-1 \quad per\, x \neq -1$$
$$f(x) indefinita \quad per\, x=-1$$

C'è quindi una discontinuità per x = -1, intuitivamente c'è un buco infinitamente piccolo e almeno in linea di principio per disegnare la retta dobbiamo staccare la matita dal foglio per un attimo in corrispondenza di x = -1.

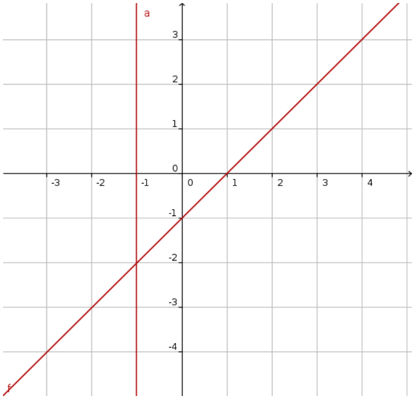
Possiamo completare la funzione in modo da renderla continua?

Se la completiamo con un qualsiasi valore diverso da -2 per esempio

$$f(x)=x-1 \quad per\, x \neq -1$$
$$f(x)=3 \quad per\, x=-1$$

la funzione resta discontinua infatti

f(-1+dx)-f(-1) = -1 + dx -1 - 3 = -5 + dx



mentre se completiamo la funzione con -2

$$f(x)=x-1 \quad per\, x \neq -1$$
$$f(x)=-2 \quad per\, x=-1$$

la funzione diventa continua sia a destra sia a sinistra:

f(-1+dx)-f(-1) = -1 + dx -1 - (-2) = dx
f(-1-dx)-f(-1) = -1 - dx -1 - (-2)= -dx
in entrambi i casi la differenza è infinitesima e dunque al funzione è continua sia a destra sia a sinistra.
In questo caso quindi la discontinuità è ***eliminabile***.

10.12 Continuità e limiti.

Con gli ultimi esempi abbiamo visto che a volte è possibile eliminare in tutto o in parte una discontinuità attribuendo un opportuno valore alla funzione.
Questo opportuno valore in matematica si chiama **limite**.
In pratica il limite è il valore di *y* che rende una data funzione *f(x)* continua per un dato valore di *x*.
Nel caso della funzione Segno si scriverà:

$$\lim_{x \Rightarrow 0^+} Sign(x) = 1$$

che si legge: "*limite per x che tende a zero da destra di Sign(x) è uguale a uno*".

$$\lim_{x \Rightarrow 0^-} Sign(x) = -1$$

che si legge: "*limite per x che tende a zero da sinistra di Sign(x) è uguale a meno uno*".
Nel caso della funzione algebrica fratta del paragrafo precedente si scrive:

$$\lim_{x \Rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

e si legge: "*limite per x che tende a meno uno di ... è uguale a meno due*".

10.13 Prima definizione di limite

Possiamo ora ricavare una regola generale per calcolare i limiti. In base alla definizione di continuità a destra vista nel paragrafo 10.11

$$st(f(x+dx)-f(x))=0$$

che equivale a:

$$st(f(x))=st(f(x+dx))$$

e quella di continuità a sinistra_

$$st(f(x)-f(x-dx))=0$$

che equivale a:

$$st(f(x))=st(f(x-dx))$$

il limite destro di una funzione *f(x)* per un certo valore x_0 è uguale a $st(f(x_0+dx))$. In simboli:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=st(f(x_0+dx))$$

e analogamente il limite sinistro si definisce come:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=st(f(x_0-dx))$$

In buona sostanza il calcolo di un limite si riduce al calcolo di una parte standard.
Per esempio data la funzione fratta vista poco fa, il calcolo del seguente limite per x che tende a -1 da destra. si riduce al calcolo della parte standard della funzione per $x=-1+dx$:

$$\lim_{x\Rightarrow -1^+} \frac{x^2-1}{x+1}=st\left(\frac{(-1+dx)^2-1}{-1+dx+1}\right)$$

(in pratica si sostituisce ad *x (-1+dx)),* e quindi:

$$st\left(\frac{1-2\,dx+dx^2-1}{dx}\right)=st\left(\frac{-2\,dx+dx^2}{dx}\right)=st(-2+dx)=-2$$

Per il limite da sinistra si procede in modo del tutto simile sostituendo *x* con *-1-dx*:

$$\lim_{x \Rightarrow -1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = st\left(\frac{(-1-dx)^2-1}{-1-dx+1}\right)$$
$$st\left(\frac{1+2\,dx+dx^2-1}{-dx}\right) = st\left(\frac{2\,dx+dx^2}{-dx}\right) = st(-2-dx) = -2$$

In questo caso i limiti da destra e da sinistra coincidono, si tratta infatti come già visto di una discontinuità eliminabile.
Torneremo sul concetto di limite quando tratteremo anche i numeri infiniti, reciproci degli infinitesimi.

Esercizi:
Calcolare i seguenti limiti usando la tecnica vista al paragrafo precedente:

1. $\lim_{x \Rightarrow 1^-} floor(x)$
2. $\lim_{x \Rightarrow 1^+} floor(x)$
3. $\lim_{x \Rightarrow 0^+} Sign(x)$
4. $\lim_{x \Rightarrow 0^-} Sign(x)$
5. $\lim_{x \Rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{x-2}$
6. $\lim_{x \Rightarrow 2^+} \frac{4-x^2}{x-2}$
7. $\lim_{x \Rightarrow 3^+} \frac{x^2-6\mathrm{x}+9}{x-3}$
8. $\lim_{x \Rightarrow 3^-} \frac{x^2-6\mathrm{x}+9}{x-3}$

11 - Le derivate

11.1 La definizione generale di derivata

Il procedimento di Leibniz per calcolare le derivare, visto nella prima parte di questo libro, si riassume così:

$$y=f(x)$$
$$y+dy=f(x+dx)$$
$$f(x)+dy=f(x+dx)$$
$$dy=f(x+dx)-f(x)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

e l'ultima formula può prendersi come formula per calcolare più velocemente la derivata:

Per esempio volendo calcolare con questa formula la già nota derivata di $y = x^2$ si procede come segue:

$$y=f(x)=x^2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}=\frac{x^2+2\mathrm{x}\,dx+dx^2-x^2}{dx}=\frac{2\mathrm{x}\,dx+dx^2}{dx}=2\mathrm{x}+dx$$

Il risultato è quindi un numero iperreale e la derivata non è altro che la parte standard del risultato, in questo caso:

$$y'=f'(x)=2\mathrm{x}$$

Questo suggerisce di definire la derivata in modo più rigoroso come:

$$f'(x)=st\left(\frac{dy}{dx}\right)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$ [23]

E' questa in effetti la definizione di derivata usata nell'Analisi

23 Per la verità questa è la definizione di *derivata a destra (*per valori maggiori di x); analogamente si può definire una *derivata a sinistra*:

$$f'(x)=st\left(\frac{dy}{dx}\right)=st\left(\frac{f(x)-f(x-dx)}{dx}\right)$$

Nella maggior parte dei casi che studieremo la derivata è la stessa a destra e sinistra, in altre parole la derivata è una funzione continua; più avanti vedremo che possono darsi casi di discontinuità della derivata, o di *non derivabilità*.

non standard (NSA); in questo modo vengono superate le obiezioni del Berkeley; l'eliminazione dell'infinitesimo alla fine è formalmente giustificata.
La derivata ha ovviamente senso solo per funzioni continue e quindi si ammette senz'altro che la differenza *f(x + dx) - f(x)* sia un infinitesimo *dy*.

11.2 Derivate del cubo e della potenza ennesima

Vediamo come ulteriori esempi come si calcolano queste derivate usando la definizione NSA; cominciamo con la funzione di terzo grado $y = x^3$

$$f'(x) = st\left(\frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}\right)$$
$$= st\left(\frac{x^3 + 3x^2 dx + 3x\, dx^2 + dx^3 - x^3}{dx}\right)$$
$$= st\left(\frac{3x^2 dx + 3x\, dx^2 + dx^3}{dx}\right)$$
$$= st\left(3x^2 + 3x\, dx + dx^2\right) = 3x^2$$

Analogamente si trovano le derivate delle potenze:

$$D\,x^3 = 3\,x^2$$
$$D\,x^4 = 4\,x^3$$
$$D\,x^5 = 5\,x^4$$
$$\ldots$$

e in generale (vedi prossimo paragrafo per una dimostrazione più rigorosa):

$$D\,x^n = n\,x^{n-1}$$

che è un primo esempio di *regola di derivazione*, la *regola di derivazione della potenza*.

11.3 Regole di derivazione

Per calcolare la derivata di una funzione, non è necessario ripartire ogni volta dalla definizione appena vista; sono sufficienti una serie di regole di derivazione; applicando queste regole è possibile derivare una qualsiasi funzione algebrica, goniometrica o esponenziale-logaritmica.

Derivata ...	Regola
Proprietà lineari	$D\, f(x)+g(x)=Df(x)+Dg(x)$ $D\, k.f(x)=k.D\, f(x)$
della potenza	$D\, x^n=n\, x^{n-1}$
del prodotto	$D\, f(x)g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
del reciproco	$D\frac{1}{f(x)}=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
del quoziente	$D\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)^2]}$
Della funzione composta	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$
della funzione inversa	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

11.4 La derivata della potenza

Ritroviamo questa regola già vista nella prima parte, dimostrandola questa volta con la definizione NSA di derivata.

$$D_x x^n=n\, x^{n-1}$$

Nella NSA la definizione di derivata è:

$$f'(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

e per calcolare la derivata della potenza, basta sostituire x^n a f(x), ottenendo:

$$f'(x)=st\left(\frac{(x+dx)^n-x^n}{dx}\right)$$

e quindi elevando alla ennesima potenza secondo il binomio di Newton:

$$st\left(\frac{x^n+nx^{n-1}dx+\ldots+dx^n-x^n}{dx}\right)$$

I due termini x^n si elidono a vicenda e resta

$$st\left(\frac{nx^{n-1}dx+\ldots+dx^n}{dx}\right)$$

e dividendo tutto con la proprietà distributiva per *dx*, resta solo:

$$f'(x)=st(n.x^{n-1}+\ldots+dx^n)=n.x^{n-1}$$

come volevasi dimostrare.

Questo risultato è valido per tutti gli esponenti interi positivi, per i quali è valido la regola della potenza del binomio. È notevole che la formula rimane valida anche per esponenti negativi (frazioni) e per esponenti razionali (radicali), come vedremo più avanti.

11.5 La derivata della funzione inversa

Consideriamo come primo esempio la funzione

$$y=\sqrt{x}$$

che per la definizione di radice quadrata equivale a dire (per x > 0)

$$x=y^2$$

la cui derivata è:

$$\frac{dx}{dy}=2y$$

ma invertendo la frazione e ricordando che $y=\sqrt{x}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

In definitiva abbiamo questa regola da aggiungere alle derivate fondamentali:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad D_x f(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}}$$

$$D_x \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Questa derivata ci fornisce l'esempio di una regola più generale, quella della funzione inversa, che si giustifica immediatamente ricordando l'ipotesi che per gli infinitesimi valgano le ordinare regole dell'algebra, qui quella che il reciproco di una frazione si ottiene scambiando numeratore e denominatore.

Le derivata della funzione inversa di una funzione f(x) è il reciproco della derivata di f(x).

Esercizi:
Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, usando la regola della funzione inversa:

1. $y = \sqrt[3]{x}$
2. $y = \sqrt[4]{x}$

11.6 Derivata della radice quadrata

SI è visto che la derivata di $y=\sqrt{x}$, il cui grafico è riportato di seguito, può ricavarsi considerandola come la funzione inversa del quadrato.
Vediamo ora di ricavare la stessa regola partendo dalla formula per la derivata:

$$f'(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

e sostituiamo a ***f(x)*** $\sqrt{x}$:

$$f'(x)=st\left(\frac{\sqrt{(x+dx)}-\sqrt{(x)}}{dx}\right)$$

moltiplichiamo sopra e sotto per la somma $\sqrt{(x+dx)}+\sqrt{(x)}$

$$st\left(\frac{\sqrt{(x+dx)}-\sqrt{(x)}}{dx}\right)=st\left(\frac{(\sqrt{(x+dx)}-\sqrt{(x)})(\sqrt{(x+dx)}+\sqrt{(x)})}{dx(\sqrt{(x+dx)}+\sqrt{(x)})}\right)$$

e ricordando il prodotto notevole $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$$...=st\left(\frac{x+dx-x}{dx(\sqrt{(x+dx)}+\sqrt{(x)})}\right)=st\left(\frac{dx}{dx(\sqrt{(x+dx)}+\sqrt{(x)})}\right)$$

e quindi semplificando l'infinitesimo *dx*:

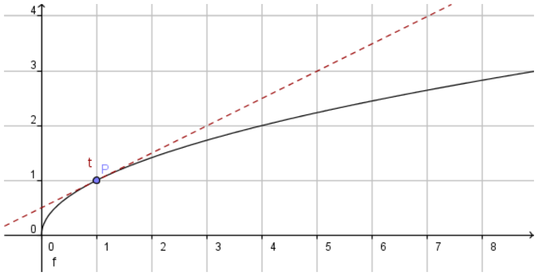
$$...=st\left(\frac{1}{(\sqrt{(x+dx)}+\sqrt{(x)})}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Dunque si ottiene:

$$D_x\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

che va inserita tra le derivate fondamentali.

Per esempio per x = 1, la derivata vale ½, valore confermato dal grafico a lato, dove è riportata la tangente nel punto P(1;1).



Si noti che la radice quadrata di x è definita solo per $x\geq 0$ mentre la derivata è definita solo per $x>0$, infatti per x = 0 il suo denominatore si annulla; ciò esprime il fatto che per x = 0 la tangente alla curva è verticale.

SI noti che applicando la regola della derivata della potenza, supponendola valida anche per esponenti razionali, si ha:

$$D_x\sqrt{x}=D_x x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dunque la regola della potenza è valida anche per esponente uguale a un mezzo.

11.7 Derivata della radice cubica

Consideriamo ora la radice cubica:

$$y=\sqrt[3]{x}$$

il cui grafico è riportato più avanti.

Applichiamo la formula per la derivata:

$$f'(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

e sostituiamo a *f(x)* $\sqrt[3]{x}$:

$$f'(x)=st\left(\frac{\sqrt[3]{x+dx}-\sqrt[3]{x}}{dx}\right)$$

moltiplichiamo sopra e sotto per la somma $\sqrt[3]{(x+dx)^2}+\sqrt[3]{(x+dx)(x)}+\sqrt[3]{(x)^2}$

$$st\left(\frac{(\sqrt[3]{(x+dx)}-\sqrt[3]{(x)})(\sqrt[3]{(x+dx)^2}+\sqrt[3]{(x+dx)(x)}+\sqrt[3]{(x)^2})}{dx\,(\sqrt[3]{(x+dx)^2}+\sqrt[3]{(x+dx)(x)}+\sqrt[3]{(x)^2})}\right)$$

e ricordando il prodotto notevole differenza di cubi:

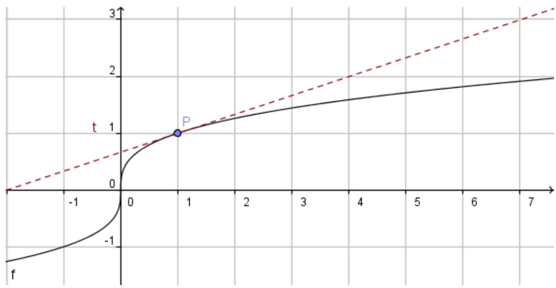
$$...=st\left(\frac{x+dx-x}{dx\,(\sqrt[3]{(x+dx)^2}+\sqrt[3]{(x+dx)(x)}+\sqrt[3]{(x)^2})}\right)$$

e quindi semplificando l'infinitesimo *dx*:

$$...=st\left(\frac{1}{(\sqrt[3]{(x+dx)^2}+\sqrt[3]{(x+dx)(x)}+\sqrt[3]{(x)^2})}\right)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Dunque si ottiene:

$$D_x\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$



che va inserita tra le derivate fondamentali.
Per esempio per x = 1, la derivata vale 1/3 valore confermato dal grafico di sopra, dove è riportata la tangente nel punto P(1;1).
Si noti che, a differenza della radica quadrata, la radice cubica di x è definita per ogni x, mentre la derivata è definita solo per x diverso da 0, infatti per x = 0 il suo denominatore si annulla; ciò esprime il fatto che per x = 0 la tangente alla curva è verticale.
Questa regola si può ottenere in modo più semplice utilizzando la appena vista regola della funzione inversa. Infatti la $y=\sqrt[3]{x}$ equivale a

$$x=y^3$$

la cui derivata è:

$$\frac{dx}{dy}=3y^2$$

ma invertendo la frazione e ricordando che $y=\sqrt{x}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

risultato che corrisponde esattamente a quello precedente.
SI noti che applicando la regola della derivata della potenza, supponendola valida anche per esponenti razionali, si ha:

$$D_x\sqrt[3]{x}=D_x x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

dunque la regola della potenza è valida anche per esponente uguale a un terzo.
Generalizzando il procedimento con il quale abbiamo verificato questa regola per la radice quadrata (esponente ½) e per la cubica (esponente 1/3) si può dimostrare che la regola della derivata della potenza è valida anche per esponenti razionali.

$$D_x x^{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$

11.8 Derivata della funzione composta

Come si è già visto nella prima parte applicando anche agli infinitesimi le ordinarie regole dell'algebra :

$$\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

si ricava la regola generale:

La derivata di una funzione composta da due funzioni elementari è il prodotto delle derivate di queste.

Una funzione composta si può anche scrivere ***y** = f(g(x))*, dove:

$$y=f(t)$$
$$t=g(x)$$

Esempi:

1. Derivare $y=(x-1)^2$. La funzione si scompone in: $\begin{matrix} y=t^2 \\ t=x-1 \end{matrix}$ e le derivate sono: $y'=\frac{dy}{dt}=2\mathrm{t}$ e $t'=\frac{dt}{dx}=1$.
   La derivata complessiva è:
   $D_x(x-1)^2=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=2(x-1)=2\mathrm{x}-2$.
   In questo caso la derivata poteva calcolarsi più velocemente elevando prima al quadrato e poi facendo la derivata:
   $y=(x-1)^2=x^2-2\mathrm{x}+1$
   $y'=2x-2$
2. Derivare $y=\sqrt{3\mathrm{x}+1}$ che si scompone in $\begin{matrix} y=\sqrt{t} \\ t=3\mathrm{x}+1 \end{matrix}$ le cui derivate sono $\begin{matrix} y'=\frac{1}{2\sqrt{t}} \\ t'=3 \end{matrix}$. La derivata complessiva è:
   $D_x\sqrt{3\mathrm{x}+1}=3\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{3}{2\sqrt{3\mathrm{x}+1}}$
3. Derivare $y=\cos(2\mathrm{x})$ che si scompone in $\begin{matrix} y=\cos(t) \\ t=2\mathrm{x} \end{matrix}$ le cui derivate sono $\begin{matrix} y'=-\sin(t) \\ t'=2 \end{matrix}$. La derivata complessiva è:
   $D_x\cos(2\mathrm{x})=2(-\sin(t))=-2\sin(2\mathrm{x})$
4. Derivare $y=\sin^2(x)$ che si scompone in $\begin{matrix} y=t^2 \\ t=\sin(x) \end{matrix}$ le cui derivate sono $\begin{matrix} y=2\mathrm{t} \\ t=\cos(x) \end{matrix}$ e quindi la derivata complessiva è:
   $D_x\sin^2(x)=2\mathrm{t}\cos(x)=2\sin(x)\cos(x)$.
5. Derivare $y=\sin(x^2)$ che si scompone in $\begin{matrix} y=\sin(t) \\ t=x^2 \end{matrix}$ le cui derivate sono $\begin{matrix} y'=\cos(t) \\ t'=2\mathrm{x} \end{matrix}$. La derivata complessiva è:
   $D_x\sin(x^2)=2\mathrm{x}\cos(t)=2\mathrm{x}\cos(x^2)$

Esercizi:

1. $y=(x^2+1)^2$ risolvere in due modi come nell'esempio 1
2. $y=(2\mathrm{x}-1)^3$ risolvere in due modi come nell'esempio 1
3. $y=\sqrt{1-x}$
4. $y=\sqrt{1-x^2}$

11.9 La derivata del prodotto di funzioni

Ricaviamo ora la regola di derivazione del prodotto, già vista nella prima parte con la definizione NSA di derivata:

$$D_x f(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

Se ora abbiamo invece di f(x) un prodotto di due funzioni continue *u = f(x) e v = g(x), allora è f(x + dx) = u + du e* g*(x + dx) = v + dv*:

$$D_x f(x)g(x)=st\left(\frac{(u+du)(v+dv)-uv}{dx}\right)$$

svolgendo il prodotto si ottiene:

$$st\left(\frac{\cancel{uv}+u\,dv+v\,du+du\,dv-\cancel{uv}}{dx}\right)=st\left(\frac{u\,dv+v\,du+du\,dv}{dx}\right)$$

e applicando la proprietà distributiva della divisione:

$$=st\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+du\frac{dv}{dx}\right)$$

ma l'ultimo termine è infinitesimo e va scartato, quindi:

$$D_x uv=st\left(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\right)=u'v+uv'$$

ovvero indicando le funzioni *f(x)* e *g(x)*

$$D_x f(x)\times g(x)=vu'+uv'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Abbiamo ritrovato la classica regola di Leibniz per il prodotto.

11.9.a Esempi

1. Rivediamo l'esempio iniziale, e cioè la funzione *y* = *(x -1)(x – 2)*, dove *f(x)* è *(x-1)* e *g(x) è (x-2)*. Applicando la regola appena dimostrata si ha:

$$D(x-1)(x-2)$$
$$...=1.(x-2)+(x-1).1$$
$$...=x-2+x-1$$
$$...=2\mathrm{x}-3$$

2. Funzione *y* = *(2x - 1)(2 - x²)*

$$D(2\mathrm{x}-1)(2-x^2)$$
$$...=(2\mathrm{x}-1)(-2\mathrm{x})+2(2-x^2)$$
$$...=-4\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+4-2\mathrm{x}^2$$
$$...=-6\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+4$$

allo stesso risultato si perviene moltiplicando prima i due polinomi e calcolando poi la derivata del polinomio:

$$D(2\mathrm{x}-1)(2-x^2)=$$
$$D(4\mathrm{x}-2-2\mathrm{x}^3+x^2)=$$
$$4-6\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}=$$
$$-6\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+4$$

Esercizi:

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

1. $y=(2\mathrm{x}-4)(1-3\mathrm{x})$
2. $y=(3x^2-1)(1-x^2)$

11.10 La derivata del reciproco di una funzione

Per calcolare la derivata del reciproco di una funzione, è sufficiente scriverla usando gli esponenti negativi, e quindi applicare le regole di derivazione della potenza e della funzione composta, p.es.

$$D\frac{1}{(x-1)^2}=D(x-1)^{-2}=-2(x-1)^{-3}=-\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$D\frac{1}{(x^2-1)}=D(x^2-1)^{-1}=-1(x^2-1)^{-2}2\mathrm{x}=-\frac{2\mathrm{x}}{(x^2-1)^2}$$

È d'altra parte utile avere una vera e propria regola per derivare

il reciproco; la regola è quella riportata nel quadro in alto.
Per dimostrarla si può partire dalla regola della funzione composta, scomponendo nelle due funzioni componenti:

$$y=\frac{1}{t}\rightarrow y'=-\frac{1}{t^2}$$

$$t=f(x)\rightarrow y'=f'(x)$$

e quindi

$$D\,f(x)^{-1}=y'\,t'=-\frac{f'(x)}{t^2}=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

In conclusione

$$D\frac{1}{f(x)}=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Esempi:

1. Derivare $y=\frac{1}{3\mathrm{x}+2}$. La derivata del denominatore *f(x)* è: *f'(x)* = *3*. Applicando la regola appena vista si ha:
$$y'=-\frac{3}{(3\mathrm{x}+2)^2}$$
2. Derivare $y=\frac{1}{x^2-1}$. La derivata del denominatore *f(x)* è: *f'(x)* = *2x*. Applicando la regola appena vista si ha:
$$y'=-\frac{2\mathrm{x}}{(x^2-1)^2}$$
3. Derivare $y=\frac{1}{3-2\mathrm{x}^2}$. La derivata del denominatore *f(x)* è: *f'(x)* = *-4x*. Applicando la regola appena vista si ha:
$$y'=-\frac{-4\mathrm{x}}{(3-x^2)^2}=\frac{4\mathrm{x}}{(3-x^2)^2}$$
4. Derivare $y=sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$. La derivata del denominatore *f(x)* è: *f'(x)* = *-sin(x)*. Applicando la regola appena vista si ha:
$$y=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

11.11 La derivata del quoziente di funzioni

Come per il prodotto anche la derivata del quoziente non è il quoziente delle derivate.
Basta un semplice controesempio per convincersi che non è così; supponiamo infatti di avere le due funzioni $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x$ le loro derivate sono $f'(x) = 6x$ e $g'(x)= 1$.
Ora il quoziente delle derivate è *6x*
Il quoziente delle funzioni è *3x* e la sua derivata è *3*, niente a che fare con *6x*.
Dunque la derivata del quoziente di due funzioni NON è il quoziente delle derivate.
In generale se abbiamo una funzione che è il quoziente di due funzioni $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e quindi si può scrivere $y = u/v$, si può procedere come segue, incrementando di un infinitesimo tutte le variabili:

$$y+dy=\frac{u+du}{v+dv}$$

$$dy=\frac{u+du}{v+dv}-y=\frac{u+du}{v+dv}-\frac{u}{v}$$

$$dy=\frac{(u+du)v-u(v+dv)}{v(v+dv)}$$

$$dy=\frac{\cancel{uv}+du\,v-\cancel{uv}-u\,dv}{v(v+dv)}=\frac{du\,v-u\,dv}{v^2+v\,dv}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u'v-uv'}{v^2+dv}$$

$$D_x\frac{u}{v}=st\left(\frac{u'v-uv'}{v^2+dv}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

dopo aver diviso tutto per *dx* si è usata la funzione parte standard per scartare l'infinitesimo.
Si ricava la regola del quoziente che può scriversi usando la notazione di Lagrange:

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

o anche usando il simbolo di funzione:

$$D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

che è la forma più consueta di questa regola.

Esempi:

1. Derivare $y = \frac{1-x}{1+x}$. Le due derivate sono *f'(x)* = *-1* e *g'(x)* = +*1*. La derivata del quoziente è:

$$y = \frac{-1(1+x) - (1-x)1}{(1+x)^2} = \frac{-1-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

Prendiamo la funzione:

$$y = \frac{2x^3 - x}{3x+1}$$

2. Derivare $y = \frac{2x^3 - x}{3x+1}$ Le derivate sono *(6x²* - *1)* e 3, e dunque la derivata è:

$$y' = \frac{(2x^3 - x)3 - (6x^2 - 1)(3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{6x^3 - 3x - 18x^3 - 6x^2 + 3x + 1}{(3x+1)^2}$$

$$y' = \frac{-12x^3 - 6x^2 + 1}{(3x+1)^2}$$

3. Derivare $y = \frac{x^2+1}{1-2x^2}$. Le due derivate sono *f'(x)* = *2x* e *g'(x)* = *-4x*. La derivata del quoziente è:

$$y = \frac{2x(1-2x^2) - (x^2+1)(-4x)}{(1-2x^2)^2} = \frac{2x - 4x^3 + 4x^3 + 4x}{(1-2x^2)^2}$$

$$\ldots = \frac{6x}{(1-2x^2)^2}$$

4. Calcolare la derivata della tangente (vedi oltre) come quoziente di seno e coseno: $y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Le due derivate sono *f'(x)* = *cos(x) e g'(x)* = *-sin(x)*. La derivata del quoziente:

$$y=\frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
$$\ldots=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

risultato che coincide con quello classico $1+\tan^2(x)$.

Esercizi:
Calcolare la derivata dei seguenti quozienti:

1. $y=\frac{4x+1}{2x}$
2. $y=\frac{x+1}{2x-1}$
3. $y=\frac{x^2-4x+4}{3x+2}$

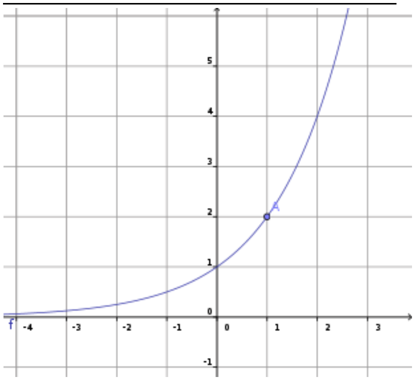
11.12 Funzioni esponenziali e logaritmiche

11.12.a Le funzioni esponenziali e il numero e.

Per una trattazione estesa delle funzioni esponenziali e logaritmiche, rimandiamo a un manuale di algebra. Ricordiamo qui le definizioni e proprietà fondamentali di queste funzioni.
Per funzione esponenziale si intende una funzione che ha la variabile all'esponente, per esempio:

$$y=2^x$$

il cui grafico che si può ottenere facilmente per punti è riportato a lato.



La funzione 2^x

La funzione esponenziale è strettamente crescente, in un certo senso è la funzione crescente per eccellenza. Osservando il grafico si nota infatti che anche la pendenza della curva tende a crescere al crescere della *x*.

Esponenziale è anche la funzione a esponente negativo:

$y=2^{-x}$

che è poi la stessa funzione ribaltata rispetto all'asse delle y, ed è strettamente decrescente.

In generale si chiama esponenziale una qualsiasi funzione che ha l'incognita all'esponente, per esempio

$y=a^{x}$

$y=a^{2x-1}$

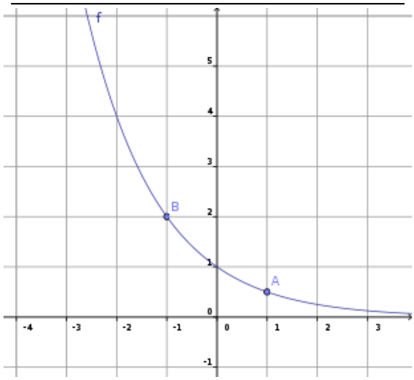
$y=a^{x^2+1}$

dove a è un qualsiasi numero reale positivo; di solito si ammette solo basi positive, ***a* > *0***.[24].

Per valori negativi la funzione esponenziale assume valori sempre più vicini a zero senza mai annullarsi; si può scrivere:

$a^{-\omega}=dx$

per indicare il fatto che per argomenti infiniti negativi la funzione è infinitesima.



La funzione 2^{-x}

Molti fenomeni in natura e anche in economia hanno andamento esponenziale crescente o decrescente.

Per esempio se si acquistano 10000 € di un fondo con interesse annuale composto del 3% si riceveranno ogni anno 300 € di interesse che verranno aggiunti al capitale; dunque dopo un

24 In linea di principio sarebbe possibile considerare anche funzioni esponenziali con basi negative ma ci si scontrerebbe con problemi intrattabili: si pensi per esempio alla funzione $(-2)^{x}$ questa per x intero e pari assume valore positivo, per x intero e dispari valore negativo, per x razionale valori diversi (positivi e negativi) a seconda del denominatore, o addirittura a seconda della forma della frazione, per esempio $(-2)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-2)^2}=\pm\sqrt{2}$ è un numero reale, ma semplificando l'esponente $(-2)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}i$ sarebbe un numero immaginario.

anno i 10000 € diventano 10300, dopo due anni non saranno 10600 ma di più perché il 3% viene pagato sul capitale accumulato, qui 10300, quindi saranno 10300 (1 + 3/100) = 10300 . 1,03 = 10609 €.
Ogni anno quindi si moltiplica il capitale per 1,03.
Dopo n anni il capitale accumulato sarà pari a:

$$C=10000(1+0{,}03)^n$$

che è appunto una funzione esponenziale avendo la variabile *n* all'esponente. In generale detto C_0 il capitale iniziale e t il tasso di interesse, si ha:

$$C=C_0(1+t)^n$$

che è la legge dell'interesse composto.
Per esempio, se si investono 5000 € al tasso del 4%, quanto varrà il capitale dopo 15 anni?
Sostituendo nella formula si ottiene subito il risultato:

$$C=5000(1+0{,}04)^{15}=5000\times1{,}80094=9004{,}72\,€$$

Il capitale è quasi raddoppiato.
SI ponte ora questo problema: che differenza c'è tra investire una somma con un tasso del 4% pagato annualmente e un tasso del 2% pagato semestralmente?
A prima vista sembra la stessa cosa, ma facendo i conti dopo 15 anni con le stesse cifre di sopra si ha per il tasso semestrale:

$$C=5000(1+0{,}02)^{30}=5000\times1{,}81136=9056{,}81\,€$$

Dunque se pure di poco la seconda soluzione è più conveniente; se poi si avesse una cedola dell'1% pagata 4 volte l'anno si avrebbe:

$$C=5000(1+0{,}01)^{60}=5000\times1{,}81670=9083{,}48\,€$$

c'è un ulteriore miglioramento, ma sempre di meno.
Se quel 4% venisse pagato 20 volte l'anno ogni volta lo 0,2%:

$$C=5000(1+0{,}002)^{300}=5000\times1{,}82103=9105{,}14\,€$$

Si vede quindi che all'aumentare del numero delle rate c'è un miglioramento ma sempre più piccolo e si ha l'impressione che il fattore si stabilizzi su un valore intorno a 1,82.
L'effetto sarebbe maggiore per tassi maggiori?
Ponendo per esempio un tasso (del tutto inverosimile!) del 100% e investendo 1€ a questo tasso si avrebbero questi valori:

Tasso	Capitale	Rispetto a C_0
1 = 100%	$C=1\times(1+1)^1=2\,€$	2,0000
1/2 = 50%	$C=1\times(1+0,5)^2=2,25\,€$	2,2500
1/4 = 25%	$C=1\times(1+0,25)^4=2,4414\,€$	2,4414
1/10 = 10%	$C=1\times(1+0,1)^{10}=2,5937\,€$	2,5937
1/100 = 1%	$C=1\times(1+0,01)^{100}=2,7048\,€$	2,7048
1/1000 = 0,1%	$C=1\times(1+0,001)^{1000}=2,7169\,€$	2,7169
1/10000 = 0,01%	$C=1\times(1+0,0001)^{10000}=2,7181\,€$	2,7181

Come si vede il fattore aumenta ma in modo sempre più lento avvicinandosi sempre più a un numero che vale circa 2,718 .
Si può dimostrare che questo fattore non aumenta illimitatamente ma all'infinito assume un valore che prende il nome di numero di Nepero si rappresenta con la lettera ***e***, e le cui prime cifre sono 2,718281828.
Il numero ***e*** è un numero che ha un'importanza che va molto al di là di questo problema di tassi di interesse per i motivi che si vedranno poco più avanti.
In particolare il nome di funzione esponenziale viene di solito riservato alla funzione:

$$y=e^x$$

La definizione di ***e*** ricalca quella del problema visto poco fa: usando infiniti ed infinitesimi si scrive:

$$e=(1+\frac{1}{\omega})^{\omega}=(1+dx)^{\frac{1}{dx}}$$

dove ***dx*** è il tasso di interesse (qui infinitamente piccolo) ed ***ω = 1/dx*** è il suo reciproco (qui un numero infinito di periodi).
Nell'analisi classica si ha invece questa definizione

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

che si legge e è uguale al limiti per n che tende a infinito di $(1+1/n)^n$, dove n è il numero di periodi. In pratica questa definizione ci dice che ***e*** è il numero al quale si avvicina sempre più la formula del tasso quando il numero di periodi tende a infinito.

*11.12.b Eulero calcola il valore di **e***

Usando la definizione appena vista e applicandovi con una certa disinvoltura[25] la formula della potenza del binomio[26], Eulero ricavò una formula per approssimare il numero ***e***:

$$e=\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=$$

$$1+\frac{\omega}{1}\frac{1}{\omega}+\frac{\omega(\omega-1)}{2!}\frac{1}{\omega^2}+\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{3!}\frac{1}{\omega^3}+\ldots\frac{\omega}{\omega^{\omega}}$$

che essendo $\omega(\omega\text{-}1) = \omega^2$ ... dà la formula

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Questa formula che ritroveremo per mezzo dei polinomi di Maclaurin (par.14.3), ci fornisce un altro metodo per approssimare il numero di Nepero; i primi valori forniti sono: 1 2 2,5 2,(6) ...

11.12.c Le funzioni esponenziali degli infinitesimi.

Sulla base delle definizioni viste è facile ricavare il valore della funzione esponenziale di un infinitesimo:

---

25 In effetti ai tempi di Eulero non vi erano ancora definizioni rigorose dei numeri infiniti e mancava una dimostrazione che per questi numeri valessero le ordinarie regole dell'algebra, come la potenza del binomio usata qui.

26 Ricordiamo che la potenza del binomio si calcola usando i numeri del triangolo di Tartaglia detti coefficienti binomiali secondo la formula:
$$(A+B)^n=A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}B+\binom{n}{2}A^{n-2}B^2+\ldots+B^n$$ dove $\binom{n}{2}$ rappresenta il secondo numero della ennesima riga del triangolo di Tartaglia (iniziando da zero). Per esempio il cubo del binomio si calcola con la formula: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$$e^{dx} = (1+dx)^{\frac{1}{dx}dx} = (1+dx)^1$$
$$e^{dx} = 1+dx$$

Questa formula in pratica esprime il fatto che per valori infinitamente vicini a zero la funzione esponenziale cresce in modo lineare.

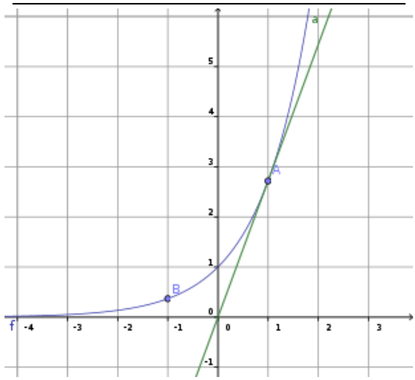
*11.12.d Grafico e derivata di y = e^x^*

x	$y = e^x$
-2	0,1353
-1	0,3679
0	1,0000
1	2,7183
2	7,3891

Calcolando i valori di e^x si può costruire il grafico della funzione esponenziale; alcuni valori sono riportati nella tabella accanto.
La curva somiglia a quelle già viste come $y = 2^x$.
Osservando il grafico sotto e le tangenti ad essa, si nota che per x=0 la tangente ha una pendenza sui 45° e quindi pari a 1, mentre per *x=1* e quindi *y* = ***e*** la pendenza sembra avere un valore vicino ad ***e*** stesso.
Inoltre è evidente che la pendenza della tangente è sempre positiva e crescente e che i suoi valori sono sempre simili a quelli di *y*; per valori piccoli di *y* si hanno piccole pendenze, per valori alti di *y* si hanno grandi pendenze.
Tutto questo lascia pensare che l'andamento della derivata sia molto simile a quello della funzione.
Vediamo di trovare la derivata partendo dalla funzione e incrementandola di un infinitesimo:

$$y = e^x$$
$$y + dy = e^{x+dx}$$

quindi applicando le proprietà



La funzione e^x^ e le tangenti

delle potenze e sostituendo:

$$e^x + dy = e^x e^{dx}$$
$$dy = e^x e^{dx} - e^x$$

e mettendo in evidenza e^x:

$$dy = e^x (e^{dx} - 1)$$

ma ricordando che $e^{dx} = 1 + dx$ si ha

$$dy = e^x (\cancel{1} + dx - \cancel{1})$$
$$dy = e^x dx$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Dunque la derivata di e^x non è solo simile ma identica alla funzione stessa:

$$D_x e^x = e^x$$

La funzione esponenziale e^x è l'unica funzione ad avere se stessa come derivata. Si può anche dire che la funzione esponenziale è *invariante* rispetto all'operazione di derivata.

Lo stesso vale ovviamente anche per l'integrazione:

$$\int e^x = e^x + c$$

fatta salva la presenza della costante di integrazione.

Segue immediatamente che sono uguali a e^x anche tutte le derivate successive:

$$y = e^x$$
$$y' = e^x$$
$$y^{ii} = e^x$$
$$y^{iii} = e^x$$
$$\ldots$$

La derivata di una funzione esponenziale $\mathbf{a^x}$ con base diversa da **e** è, ricordando che per la definizione di logaritmo naturale è $\mathbf{a = e^{\ln(a)}}$:

$$D_x a^x = D_x e^{x \ln(a)} = \ln(a) e^{x \ln(a)} = \ln(a) a^x$$

Riassumendo le regole di derivazione delle funzioni esponenziali:

$$D_x e^x = e^x$$
$$D_x a^x = \ln(a) a^x$$

Come si vede la derivata di una funzione esponenziale con base diversa da ***e*** non è altrettanto semplice. Questo spiega l'importanza del numero di Nepero in Analisi.

Esempi:

1. Derivare $y=e^{-x}$ Si tratta di una funzione composta, dunque la derivata si calcola:
$$\begin{matrix} y=e^t & \frac{dy}{dt}=e^t \\ t=-x & \frac{dt}{dx}=-1 \end{matrix} \qquad D_x e^{-x}=-1\times e^{-x}=-e^{-x}$$
2. Derivare $y=e^{2x}$ Si tratta anche qui di una funzione composta, dunque la derivata si calcola:
$$\begin{matrix} y=e^t & \frac{dy}{dt}=e^t \\ t=2\mathrm{x} & \frac{dt}{dx}=2 \end{matrix} \qquad D_x e^{2x}=2e^{2x}$$
3. Derivare $y=e^{x^2}$ Si tratta anche qui di una funzione composta, dunque la derivata si calcola:
$$\begin{matrix} y=e^t & \frac{dy}{dt}=e^t \\ t=x^2 & \frac{dt}{dx}=2\mathrm{x} \end{matrix} \qquad D_x e^{x^2}=2xe^{x^2}$$

11.13 Le funzioni iperboliche

Si definiscono le seguenti funzioni *iperboliche*:

$$f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Questa funzione si chiama *coseno iperbolico* in analogia alla funzione coseno della trigonometria; è una funzione pari, infatti cambiando x in -x la funzione non cambia; il suo grafico è quindi simmetrico rispetto all'asse delle y. Per x = 0 vale 1.

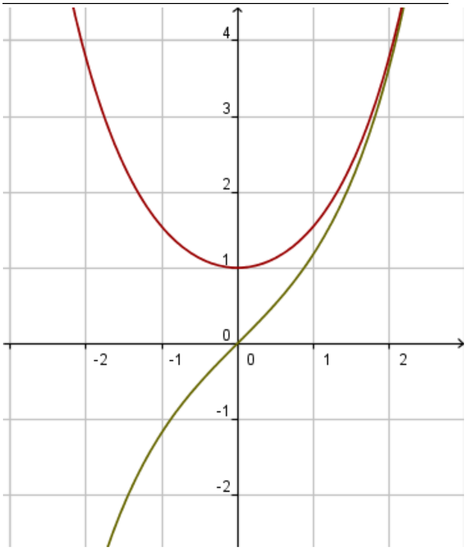
$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Questa funzione si chiama *seno iperbolico* in analogia alla funzione seno; è una funzione dispari, infatti cambiando x in -x

la funzione cambia di segno; il suo grafico è quindi simmetrico rispetto all'origine. Per x = 0 vale 0.
É facile verificare che queste due funzioni sono una la derivata dell'altra; la derivata del coseno iperbolico è:

$$D_x \cosh(x) = D_x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{D_x e^x + D_x e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

In modo del tutto analogo si dimostra che $D_x \sinh(x) = \cosh(x)$
Ovvia conseguenza è che la derivata seconda di queste funzioni coincide con le funzioni stesse.
Da questi risultati si conclude che Il coseno iperbolico ha un minimo in (0;1) (infatti la derivata prima vale 0 e la derivata seconda è uguale a se stessa e quindi vale 1, concavità verso l'alto), il seno ha un flesso nell'origine (infatti la derivata prima è sempre positiva, mentre la derivata seconda è nulla).



Il coseno e, sotto, il seno iperbolico

Le funzioni iperboliche godono di diverse proprietà molto simili a quelle delle funzioni goniometriche:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *(identità iperbolica fondamentale)*

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

(formule di addizione)

$$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)$$
$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(y)$$
(formule di duplicazione)

A titolo di esempio ecco la verifica della prima, che fa uso delle proprietà delle potenze e del quadrato del binomio:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=$$
$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$
$$\frac{e^{2x}+2e^x e^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^x e^{-x}+e^{-2x}}{4}=$$
$$\frac{\cancel{e^{2x}}+2\times 1+\cancel{e^{-2x}}-\cancel{e^{2x}}+2\times 1-\cancel{e^{-2x}}}{4}=$$
$$\frac{4}{4}=1$$

La verifica delle altre quattro si fa in modo del tutto analogo e la lasciamo per esercizio al lettore.

11.14 La funzione di Gauss o gaussiana

Un funzione esponenziale molto importante è quella di Gauss, detta gaussiana; nella sua forma più semplice la sua espressione è:

$y=e^{-x^2}$ [27]

La funzione è chiaramente pari, la sua derivata, usando la regola della funzione composta è:

$y=-2xe^{-x^2}$

che si annulla per *x = 0* , è negativa per x>0 e positiva per x<0,

27 Per la verità la funzione di Gauss ha di solito forme un po' più complicate, p.es.: $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; tra i motivi quello di fare in modo che l'area sottesa alla curva tra meno infinito e più infinito sia pari a 1, cosa importante in probabilità. L'andamento è comunque simile alla forma semplificata vista qui sopra.

dunque ha ivi un massimo, il punto (0;1).
La derivata seconda vale, usando la regola di Leibniz:

$$y=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=(-2+4x^2)e^{-x^2}$$

dunque ci sono due flessi, le due soluzioni dell'equazione:

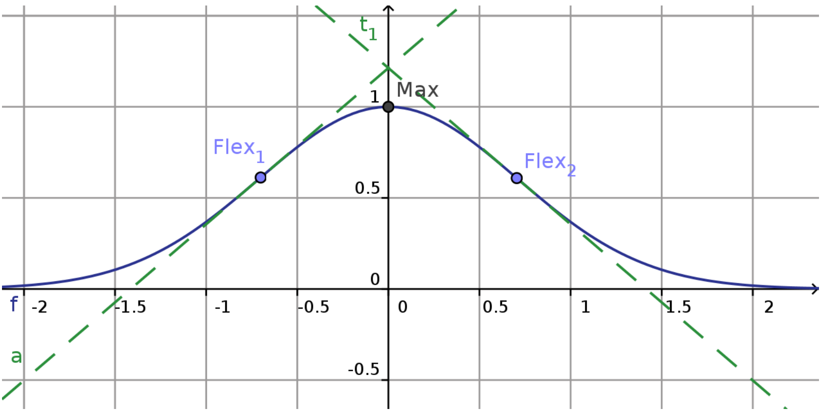
$$(-2+4x^2)e^{-x^2}=0$$

che essendo l'esponenziale sempre positivo si riduce a un'equazione algebrica:

$$-2+4x^2=0$$

che ha due soluzioni simmetriche

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm 0{,}7$$



La curva di Gauss. Le tangenti nei due punti di flesso sono tratteggiate

I due flessi hanno quindi coordinate (-0,7;0,61) (+0,7;0,61).
La curva di Gauss è importante soprattutto in probabilità e statistica, infatti molte distribuzioni statistiche hanno un andamento simile a quello di questa curva e detto perciò gaussiano.

11.14.a Le funzioni logaritmiche

Anche per le funzioni logaritmiche, rimandiamo a un manuale di algebra.
Per logaritmo si intende la funzione inversa della funzione esponenziale.
Per esempio nell'equazione:

$2^x=8$

x deve essere 3 in modo che 2^3 dia appunto 8 e si chiama appunto *logaritmo* di 8.
In generale il logaritmo viene definito in questo modo:
Si chiama logaritmo in base b di un certo numero x, l'esponente che si deve dare alla base b per ottenere x.
Nell'esempio precedente possiamo quindi dire che 3 è il *logaritmo* in base 2 di 8 e si scrive:

$3=\log_2 8$

Alcuni altri esempi:

$\log_{10} 10000=4$ infatti 10^4 = 10000; in generale i logaritmi in base 10, molto usati con il nome di logaritmi decimali danno il numero di cifre intere di un numero diminuito di 1.

$\log_4 2=\frac{1}{2}$ infatti ricordando la definizione di esponente razionale si ha $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(4)}=2$

$\log_2 \frac{1}{2}=-1$ infatti ricordando gli esponenti negativi si ha $2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\log_2 -2=?$ per argomenti negativi il logaritmo non è definito.

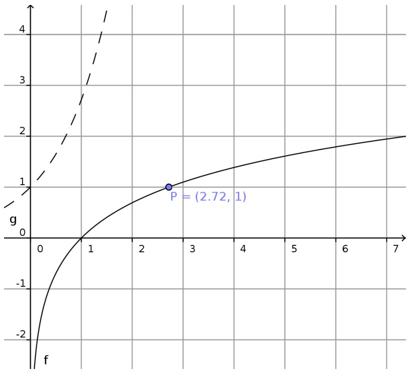
11.14.b Il logaritmo naturale

In analisi ha importanza fondamentale il cosiddetto logaritmo naturale che è quello in base ***e***.

Per definizione è quindi

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Il grafico del logaritmo naturale si può costruire per punti e il risultato è quello a lato; in effetti non è altro che la curva esponenziale (tratteggiata nel disegno) ribaltata rispetto alla bisettrice del primo quadrante.



La curva logaritmica

Come si è visto il logaritmo non è definito per valori negativi e di conseguenza la funzione logaritmica esiste solo alla destra dell'asse delle ***y***, ovvero per ***x*** > *0*.

Se la curva esponenziale è la curva crescente per eccellenza, nel senso che cresce sempre più velocemente, la curva logaritmica è ugualmente crescente ma con una pendenza sempre minore.

11.14.c Le funzioni logaritmiche degli infinitesimi.

Ricordando che è $e^{dx} = 1 + dx$ si può calcolare:

$$\ln(e^{dx}) = \ln(1 + dx)$$

$$dx = \ln(1 + dx)$$

e dunque

$$\ln(1 + dx) = dx$$

Il logaritmo di un infinitesimo è viceversa l'infinito negativo:

$$\ln(dx) = -\omega$$

11.14.d La derivata del logaritmo naturale

Si è visto che la derivata della funzione esponenziale è:

$$D_x e^x = e^x$$

Ricordando ora la regola della derivata della funzione inversa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

si può calcolare la derivata della funzione *y* = *ln(x)*, dato che la funzione inversa è *x* = e^y, e quindi la derivata

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

e quindi

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}$$

Se si considerano logaritmi in altra base si ha:

$$D\log_a x = D\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} D\ln(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Riassumendo le derivate delle funzioni logaritmiche:

$$D_x \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$D_x \log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Va osservato che nel campo dei numeri reali il logaritmo è definito solo per argomenti positivi; altrettanto vale per la derivata.

A volte per aggirare questo ostacolo si considera il logaritmo del valore assoluto:

$$D\ln(|x|) = \frac{1}{x}$$

$$D\log_a(|x|) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Il primo risultato si può giustificare usando la regola della funzione composta:

$$y = \ln(t)$$
$$t = |x|$$
$$D\log(|x|) = \frac{1}{t} Sign(x) = \frac{1}{|(x)|} Sign(x) = \frac{1}{x}$$

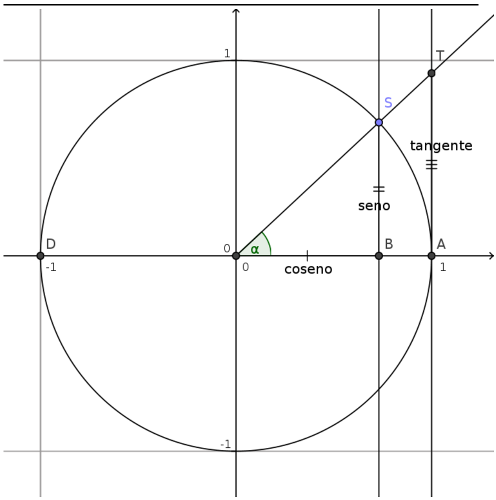
11.15 Derivata delle funzioni goniometriche

11.15.a Le funzioni goniometriche

Per una trattazione estesa delle funzioni goniometriche rimandiamo a un manuale di trigonometria.
Ricordiamo qui brevemente le principali definizioni e proprietà.
Le funzioni goniometriche principali sono tre: *seno, coseno e tangente*. Si possono definire in diversi modi, il più generale è quello che fa uso del cerchio goniometrico (che è quello con raggio unitario e centro nell'origine).
Dato l''angolo alfa tra l'asse delle x e una semiretta uscente dall'origine che incontra il cerchio nel punto S, si definiscono:

1. Il ***coseno*** di alfa è il rapporto tra il segmento OB (cateto *adiacente* all'angolo alfa nel triangolo rettangolo OBS) e il raggio OS; se il raggio vale uno come è il caso qui, il valore del coseno coincide con la lunghezza OB.
2. Il ***seno*** di alfa è il rapporto tra il il segmento BS (cateto *opposto* all'angolo alfa nel triangolo rettangolo OBS) e il raggio OS; se il raggio vale uno come è il caso qui, il valore del seno coincide con la lunghezza BS.
3. La ***tangente*** di alfa è il rapporto tra il il segmento AT (cateto *opposto* all'angolo alfa nel triangolo rettangolo OAT) e il raggio OA; se il raggio vale uno come è il caso qui, il valore della tangente coincide con la lunghezza AT.

Gli angoli possono essere misurati in gradi o in radianti; in Analisi è sempre richiesto l'uso dei radianti.
Le funzioni goniometriche possono essere definite anche per angoli maggiori dell'angolo piatto (2π) e minori di zero, dunque sono definite per ogni valore reale.
I simboli di seno, coseno e tangente variano non sono del tutto universali:



Il cerchio goniometrico

1. Il seno di alfa si indica in Italia con *sen(a)*, nei paesi anglosassoni *sin(a)* (dal latino sinus).
2. Il coseno di alfa si indica con *cos(a)* dovunque.
3. La tangente di alfa si indica in Italia con *tg(a)*, nei paesi anglosassoni *tan(a)*.

Sulle calcolatrici tascabili viene usata sempre la notazione anglosassone; così pure nella maggior parte dei software matematici, mentre fogli di calcolo come Excel e OOCalc hanno adottato la notazione italiana.
In questo libro ho preferito usare la notazione anglosassone che paradossalmente è più vicina al latino di quella italiana, anche come auspicio per una notazione universale, quale dovrebbe essere il linguaggio della matematica.
Ricordiamo alcune delle principali proprietà delle funzioni goniometriche:

1. $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ è la I identità goniometrica fondamentale; osservando il triangolo rettangolo OBS si vede che non si tratta di altro che del teorema di Pitagora applicato a questo triangolo.

2. $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ è la II identità goniometrica fondamentale; segue immediatamente osservando i triangoli rettangoli simili OAT e OBS.
3. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$ È la formula di addizione per il seno; queste formule sono necessarie poiché quelle goniometriche non sono funzioni lineari.
4. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(alfa)\sin(\beta)$ È la formula di addizione per il coseno.
5. $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ È la formula di duplicazione per il seno; anche queste formule sono necessarie poiché quelle goniometriche non sono funzioni lineari.
6. $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$ È la formula di duplicazione per il coseno.

11.15.b Funzioni goniometriche infinitesime

Consideriamo il cerchio goniometrico, che come si ricorderà ha raggio 1: per angoli molto piccoli il valore del seno e quello dell'angolo misurato in radianti, che su un cerchio di raggio uno equivale alla misura dell'arco.

Se ora consideriamo un angolo infinitesimo il seno e l'arco vengono a coincidere, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$\sin dx \simeq dx$

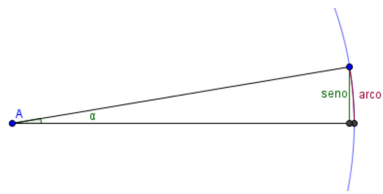


Illustrazione 1: Il seno e l'arco di un angolo molto piccolo

Il coseno dell'angolo infinitesimo, in base all'identità goniometrica fondamentale, che supporremo valida anche per gli infinitesimi:

$\cos^2 dx+\sin^2 dx=1$

vale

$\cos dx=\sqrt{1-\sin^2 dx}=\sqrt{1-dx^2}$

e quindi differisce da 1 a meno di infinitesimi del secondo ordine, cosa che si può scrivere:

$$st(\cos(dx))=1$$
$$\cos(dx)\simeq 1$$

Per la tangente valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle del seno e dunque, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore si può scrivere:

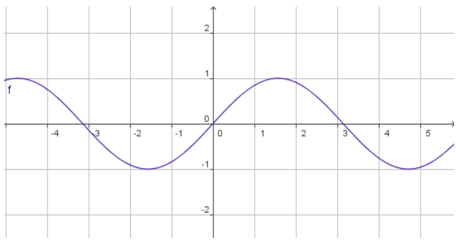
$$\tan dx = dx$$

Coerentemente con quanto si è fatto in precedenza, si ammette che per i numeri infinitesimi e iperreali, valgano le consuete formule goniometriche, in particolare quelle di addizione e sottrazione che ricordiamo qui di seguito, relativamente a un numero iperreale *x* + *dx*:

$$\sin(x\pm dx)=\sin x\cos dx \pm \sin dx\cos x \simeq \sin x \pm \cos x\, dx$$
$$\cos(x\pm dx)=\cos x\cos dx \mp \sin dx \sin x \simeq \cos x \mp \sin x\, dx$$
$$\tan(x\pm dx)=\frac{\tan x\pm\tan dx}{1\mp\tan x\tan dx}\simeq\frac{\tan x\pm dx}{1\mp\tan x\, dx}$$

11.15.c La derivata della funzione seno

Prima di procedere al calcolo della derivata del seno, diamo un'occhiata al suo grafico, il sinusoide, riportato qui a lato.



Si nota che la pendenza della curva ha un massimo per x = 0, dove appare inclinata di circa 45° e quindi con coefficiente angolare pari a 1. La pendenza è nulla per x = π/2 (90°) + 2kπ; questi valori sono proprio quelli della funzione coseno; possiamo quindi aspettarci da una semplice osservazione dell'andamento del sinusoide che la derivata del seno *abbia qualcosa a che fare* con il coseno

Per il calcolo vero e proprio partiamo dalla definizione di derivata:

$$f'(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

e sostituiamo *f(x)* con *sin(x)*:

$$f'(x)=st\left(\frac{\sin(x+dx)-\sin(x)}{dx}\right)$$

Ma per la formula di addizione del seno per numeri iperreali, ricordata sopra:

$$f'(x)=st\left(\frac{\sin x+dx\cos x-\sin(x)}{dx}\right)$$

ed eliminando sin(x) :

$$f'(x)=\frac{dx\cos x}{dx}=\cos x$$

in altre parole la derivata del seno è uguale al coseno.

$$D\sin x=\cos x$$

risultato perfettamente in linea con quello che ci aspettavamo dalla semplice osservazione del grafico.

11.15.d La derivata della funzione coseno

Il calcolo della derivata del coseno è del tutto analogo a quella del seno; partendo dalla definizione di derivata:

$$f'(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

e sostituendo ad ***f(x)*** la funzione seno:

$$f'(x)=st\left(\frac{\cos(x+dx)-\cos(x)}{dx}\right)$$

e, per la formula di addizione del coseno per i numeri iperreali ricavata sopra:

$$f'(x)=st\left(\frac{\cos x-dx\sin x-\cos(x)}{dx}\right)$$

ed eliminando il termine ***cos(x)***

$$f'(x)=-\frac{dx\sin x}{dx}=-\sin x$$

in altre parole la derivata del coseno è uguale al seno cambiato di segno.

$$D\cos x=-\sin x$$

11.15.e Derivata della funzione tangente

Veniamo ora alla terza funzione goniometrica fondamentale, la tangente; anche qui osserviamo prima di tutto il suo grafico.

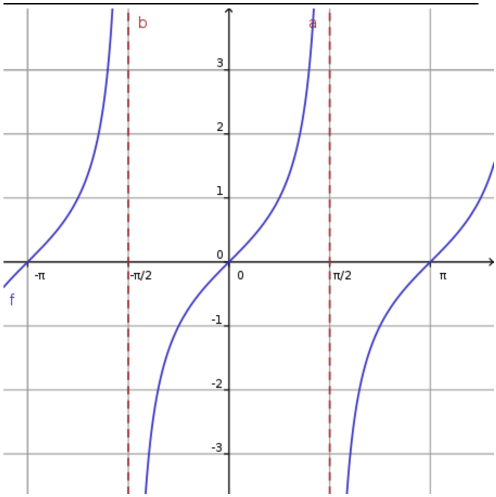


Grafico della tangente (tangentoide)

Si osserva che la curva ha sempre pendenza positiva, ed anzi questa appare sempre maggiore di 1, infatti solo per $x = 0$, la pendenza ha un valore di 1 (inclinazione di 45°).
Possiamo quindi aspettarci che la derivata della tangente sia una funzione sempre positiva e maggiore di 1, qualcosa come 1 + quantità sempre positiva.
Il calcolo della derivata si fa in modo simile ai precedenti, partendo dalla definizione di derivata:

$$f'(x)=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$$

$$f'(x)=st\left(\frac{\tan(x+dx)-\tan(x)}{dx}\right)$$

e, per la formula di addizione della tangente per i numeri iperreali:

$$f'(x)=st\left(\frac{\frac{\tan x+dx}{1-\tan x\,dx}-\tan(x)}{dx}\right)$$

sommando al numeratore si ha:

$$f'(x)=st\left(\frac{\dfrac{\tan x+dx-\tan x+\tan^2 x\,dx}{1-\tan x\,dx}}{dx}\right)$$

$$st\left(\frac{dx+\tan^2 x\,dx}{dx(1-\tan x\,dx)}\right)$$

e semplificando il fattore comune *dx*:

$$f'(x)=st\left(\frac{1+\tan^2(x)}{1-dx\tan x}\right)=1+\tan^2(x)$$

in altre parole la derivata della tangente è uguale a:

$$D\tan x=1+\tan^2 x$$

risultato che corrisponde perfettamente alle nostre aspettative; si tratta di una funzione sempre positiva e maggiore o uguale a 1. Il valore di 1 si ha per x = 0 + kπ, laddove il tangentoide ha pendenza di 45°, come previsto.
Ricordando l'identità goniometrica:

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

la derivata della tangente può anche scriversi come:

$$D_x\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

11.15.f Derivata della funzione arcoseno

L'arcoseno è la funzione inversa del seno la cui derivata, come si è visto sopra, è:

$$D_x\sin x=\cos x$$

L'arcoseno è in verità una funzione a più valori; per evitare i problemi qui consideriamo solo i valori compresi tra -π/2 e+π/2; quindi per esempio si intende arcsin(-0,5) = -π/6 e arcsin(-1) = -π/2. Diversi sono i simboli usati per questa funzione: *arcsen* (italiano), *arcsin* e *asin* (linguaggi di programmazione e molti software), *sin⁻¹* (calcolatrici tascabili)
Ricordando la regola della derivata della funzione inversa:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

si può calcolare la derivata della funzione *y* = *arcsin(x)*, dato che è *x* = *sin(y)* e quindi la derivata

$$\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-x^2}$$

e quindi é:

$$\frac{d\arcsin(x)}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

In definitiva la derivata dell'arcoseno è una funzione irrazionale fratta:

$$D\arcsin(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si noti che il denominatore è definito solo per -1 < x < 1 che è peraltro il dominio di questa funzione; inoltre è sempre positivo e in effetti l'arcoseno è sempre positivo nel codominio considerato (-π/2 < y < +π/2).

11.15.g Derivata della funzione arcotangente

L'arcotangente è la funzione inversa della tangente la cui derivata, come si è visto sopra, è:

$$D_x \tan x=1+\tan^2 x$$

L'arcotangente si indica con simboli diversi: *arctg* (libri italiani), *arctan, atan* (software informatici) e sulle calcolatrici tascabili tan^{-1}. Qui di seguito si usa *arctan*.

Ricordando ora la regola della derivata della funzione inversa:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

si può calcolare la derivata della funzione *y* = *arctan(x)*, dato che è *x* = *tan(y)* e quindi la derivata

$$\frac{dx}{dy}=1+\tan^2 y=1+x^2$$

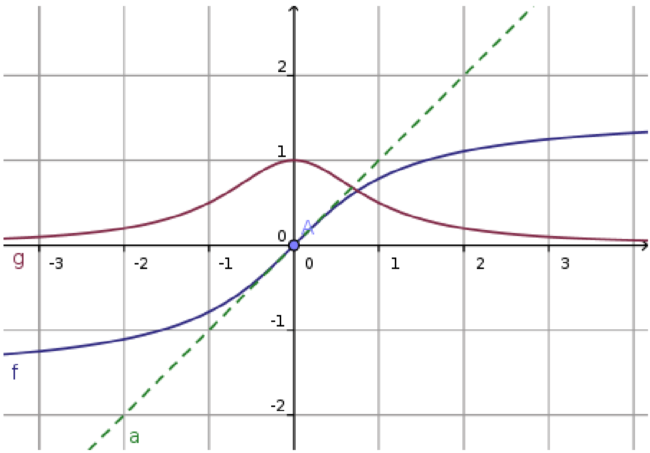
e quindi é:

$$\frac{d\arctan(x)}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{1+x^2}$$

In definitiva la derivata dell'arcotangente è una semplice funzione algebrica fratta:

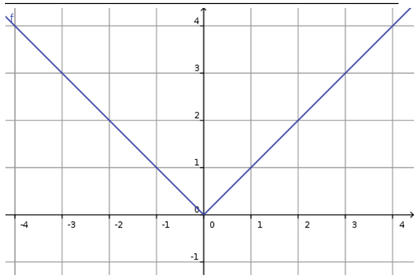
$$D_x\arctan(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Si noti che essendo il denominatore una somma di termini positivi la derivata è definita per ogni valore della *x*.
Nel grafico che segue si osserva che nell'origine l'arcotangente ha tangente con pendenza pari a uno. La derivata vale appunto uno per x = 0; l'andamento della derivata ricorda in qualche misura quello della gaussiana.



11.16 Funzioni continue e funzioni derivabili

Si è detto al momento di definire la derivata che questa ha senso solo se la funzione *f(x)* è continua. Si potrebbe pensare che la continuità garantisca la derivabilità ma non è così; si possono dare funzioni che sono continue in un punto ma non derivabili.



La funzione valore assoluto

L'esempio più semplice è la funzione valore assoluto $y = |x|$ così definita:

$$y=x \Leftrightarrow x \geq 0$$
$$y=-x \Leftrightarrow x<0$$

in altre parole la funzione assume il valore di *x* positivo indipendentemente dal segno.
Il grafico è chiaramente una spezzata, dalla definizione qui sopra segue infatti che nel primo quadrante coincide con la retta $y = x$, nel secondo quadrante con la $y = -x$, come appare nel grafico a lato.
La funzione è chiaramente continua anche nell'origine; usando la definizione di continuità per verificarlo, segue infatti che:

$$|(0+dx)|-|(0)|=|(dx)|-0=dx$$
$$|(0-dx)|-|(0)|=|(-dx)|-0=dx$$

In entrambi i casi la differenza *f(x+dx)-f(x)* è infinitesima, dunque la funzione è continua a destra e a sinistra di O(0;0).
Ma lo stesso non può dirsi per la derivata!
Intuitivamente osservando il disegno la derivata, pendenza della tangente alla curva, coincide con la pendenza delle due rette.
In base alla definizione vista sopra si perviene allo stesso risultato:

$$y=x \wedge x>0 \Rightarrow y'=+1$$
$$y=-x \wedge x<0 \Rightarrow y'=-1$$

detto in altre parole la derivata della funzione valore assoluto per $x \neq 0$ è la funzione segno.

Per *x=0* come visto sopra la funzione segno ha una discontinuità e quindi la funzione valore assoluto non è derivabile.
Infatti usando la definizione di derivata si ottiene per x = 0 a destra

$$st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)=st\left(\frac{|0+dx|-|0|}{dx}\right)=st\left(\frac{|dx|}{dx}\right)=\frac{dx}{dx}=1$$

mentre a sinistra

$$st\left(\frac{f(x)-f(x-dx)}{dx}\right)=st\left(\frac{|0|-|0+dx|}{dx}\right)=st\left(\frac{-|dx|}{dx}\right)=-\frac{dx}{dx}=-1$$

dunque la funzione valore assoluto non ha una derivata unica per x = 0.
Un punto come questo viene detto per ovvi motivi *punto angoloso*.
Questo ci permette di dare un significato intuitivo alla nozione di derivabilità:
Una funzione derivabile è una funzione il cui grafico è continuo e liscio, nel senso che non ha punti angolosi.
In definitiva la derivabilità è una condizione più forte della continuità; una funzione derivabile è anche continua, una funzione continua (come la $y=|x|$) può non essere derivabile.

12 - INTEGRALI

12.1 Integrale indefinito

Ricordiamo brevemente quanto si è visto al par. 6.1 : si definisce integrale indefinito di una funzione *f(x)*, la funzione *F(x)* che ha *f(x)* per derivata, in simboli:

$$\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow DF(x) = f(x)$$

Per esempio volendo calcolare l'integrale indefinito della funzione $y=3x^2$ è facile convincersi che la funzione $y=x^3$ ha la prima per derivata e dunque possiamo scrivere:

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

Questa però non è l'unica funzione avente $3x^2$ come derivata; lo è qualsiasi funzione del tipo $3x^2+c$. L'integrale indefinito è quindi una famiglia di infinite funzioni, o in altri termini una funzione data a meno di una costante. Si scriverà allora più correttamente:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

dove c è detta *costante di integrazione* e sta per un qualsiasi numero reale positivo o negativo o nullo.
In generale:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

La *F(x)* viene anche chiamata una *primitiva* di *f(x)*.

12.2 Integrali fondamentali

Come per le derivare anche per gli integrali indefiniti è utile costruire una tavola degli integrali fondamentali; in pratica si tratta per lo più dell'inverso delle corrispondenti derivate fondamentali.

Integrali fondamentali	
Funzione	**Integrale**
y = x^n	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
y = e^x	$\int e^x dx = e^x + c$
y = sin(x)	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
y = cos(x)	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
y = sinh(x)	$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$
y = cosh(x)	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$

12.3 Regole di integrazione

Esistono regole di integrazione che consentono di determinare l'integrale di una funzione; in generale però il calcolo integrale è più difficile di quello delle derivate e per molte funzioni è addirittura impossibile; questo non vuol dire che non esista una funzione primitiva ma solo che questa funzione viene definita dall'integrale stesso.

Integrale ...	Regola
per somma *(proprietà lineari)*	$\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$
per parti	$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + c$
per sostituzione	$\int f(g(x))dx = \int f(t)\frac{dx}{dt}dt$ avendo posto ***t* = *g(x)***

12.3.a Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + c$$

Alla regola di derivazione del prodotto (regola di Leibniz) non corrisponde una regola altrettanto semplice e generale per l'integrazione del prodotto.
In effetti se partiamo dalla suddetta regola di Leibniz:

$$D_x f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

e passiamo agli integrali otteniamo:

$$f(x)g(x) = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx + c$$

se si tenta di risolvere questa uguaglianza rispetto a uno dei due integrali si ottiene:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + c$$

regola che ci dà l'integrale del prodotto di due funzioni in funzione dell'integrale di un altro prodotto di funzioni.
Questa regola, nota con il nome di regola di integrazione per parti, sembrerebbe di scarsa utilità visto che rimanda da un integrale a un altro ed effettivamente lo è se non sappiamo risolvere l'integrale a secondo membro.
Ma se questo secondo integrale è risolubile, la regola permette di arrivare alla soluzione. La regola può applicarsi ripetutamente, in altre parole l'integrale a destra può a sua volta calcolarsi per parti.
In alcuni casi può essere utile vedere una singola funzione come il prodotto di se stessa per 1; con questo "trucco" è p.es. possibile calcolare l'integrale del logaritmo naturale *ln(x)* (esempio 4).

Esempi:

1. $\int x\sin(x)dx$ Si può calcolare per parti prendendo *x* come *g(x)* e *sin(x)* come *f'(x)* visto che sappiamo che *sin(x)* è la derivata di *-cos(x)*. Si calcola allora:

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,1\,dx = \ldots$$
$$-x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = \ldots$$
$$-x\cos(x) + \sin(x) + c$$

2. $\int x e^x dx$ Analogo al precedente si può calcolare prendendo *x* come *g(x)* e e^x come *f'(x)* visto che

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x\,1\,dx = \ldots$$
$$x e^x - \int e^x dx = \ldots$$
$$x e^x - e^x + c$$

sappiamo che è la derivata di se stessa. Si calcola allora:

3. $\int x^2 e^x dx$ Si prende x^2 come *g(x)* e e^x come *f'(x)*. In questo modo si calcola:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x\,2x\,dx = \ldots x e^x - 2\int x e^x dx = \ldots$$

ma l'ultimo integrale lo abbiamo già calcolato al n.2

$$x^2 e^x - 2\int x e^x dx = \ldots$$
$$x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = \ldots$$
$$x^2 e^x - 2\mathrm{x} e^x + 2e^x + c = \ldots$$
$$x^2 e^x - 2\mathrm{x} e^x + 2e^x + c$$

e quindi si può sostituire direttamente
in modo analogo si può procedere per integrali del tipo $\int x^n e^x dx$ ripetendo n volte l'integrazione per parti.

4. $\int \ln(x)\,dx$ Apparentemente questo integrale non sembra integrabile per parti non essendoci un prodotto, ma basta vedere il logaritmo come il prodotto di *1* per *ln(x)* e quindi applicare la regola per parti come segue.

$$\int 1\ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = \ldots$$
$$x\ln(x) - \int 1\,dx = \ldots$$
$$x\ln(x) - x + c$$

Dunque abbiamo ricavato un integrale fondamentale:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$$

12.3.b Integrale per sostituzione

Alla regola di derivazione della funzione composta corrisponde questa regola di integrazione *per sostituzione*. L'idea di partenza è la stessa: scomporre la funzione composta in due o più funzioni elementari. Nel caso dell'integrazione occorre però sostituire sia la funzione, sia il dx.

Prendiamo per esempio il seguente integrale indefinito:

$$\int (2x-1)^2 dx$$

La funzione *(2x-1)²* può essere scomposta in due funzioni elementari, usando la variabile di appoggio *t*:

$$y=t^2$$
$$t=2x-1$$

per avere un integrale nella sola variabile *t* occorre però trasformare anche l'infinitesimo *dx*; per questo basta calcolare la derivata di t rispetto a x:

$$\frac{dt}{dx}=2 \Rightarrow dt=2\,dx \; e \; dx=\frac{dt}{2}$$

l'integrale allora diventa:

$$\int (2x-1)^2 dx=\int t^2 \frac{dt}{2}=\frac{t^3}{6}+c$$

e reintroducendo la variabile x:

$$\int (2x-1)^2 dx=\frac{(2x-1)^3}{6}+c$$

Il metodo della sostituzione è di incerta riuscita e richiede spesso ripetuti tentativi prima di arrivare alla sostituzione *giusta*, quella cioè che conduce a una funzione che sia la derivata nota di un'altra funzione.

Esempi:

a)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad ponendo \qquad y=\sqrt{t} \qquad t=x^2+1$$
$$dt=2x\,dx \qquad x\,dx=\frac{dt}{2}$$
$$\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{t}+c=\sqrt{x^2+1}+c$$

b)
$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx \qquad ponendo \qquad y=\sqrt{t} \qquad t=x^2+1$$
$$dt=2x\,dx \qquad x\,dx=\frac{dt}{2}$$
$$\int \frac{\sqrt{t}}{2}\,dt=\int \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2}\,dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{2\,\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$$

c)
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \qquad ponendo \qquad t=e^x \qquad y=\frac{t}{t^2+1}$$
$$dt=e^x\,dx$$
$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan(t)+c=\arctan(e^x)+c$$

12.4 Integrali “impossibili”

A differenza delle derivate non tutti gli integrali di funzioni elementari (algebriche, goniometriche, esponenziali-logaritmiche) sono calcolabili elementarmente, nel senso che può non esistere una funzione che abbia per derivata quella data funzione.
Due esempi di *funzioni non integrabili elementarmente:*

1. La gaussiana $y=e^{-x^2}$ non lo è, nel senso che non c'è nessuna funzione elementare che la abbia per derivata.
   É però perfettamente possibile definire una tale funzione; si definisce quindi la funzione *erf(x)* (*error function*) come $erf(x)=\int e^{-x^2}dx$ [28]. La cosa ha senso perché esistono metodi per calcolarne valori con metodi approssimati, come la formula di Simpson o i polinomi di Maclaurin e Taylor (vedi più avanti).
2. La funzione $y=\frac{\sin(x)}{x}$; anche qui si definisce una nuova funzione detta *seno integrale* così definita:
   $Si(x)=\int \frac{\sin(x)}{x}dx$
   Anche questa funzione può essere approssimata con la formula di Simpson o con i polinomi di Maclaurin o Taylor.

In definitiva l'aggettivo “*impossibile*” non è corretto per definire questi integrali; anzi l'integrale si rivela una vera e propria *fabbrica di funzioni* nel senso che moltissime funzioni matematiche sono definite per mezzo di un integrale *impossibile*.

28 Per la verità la funzione *erf(x)* viene definita di solito in un modo un po' più complicato: $erf(x)=\frac{2}{\pi}\int e^{-x^2}dx$ per i motivi visti a proposito della gaussiana.

13 - Infinito, limiti, asintoti

13.1 I paradossi di Zenone

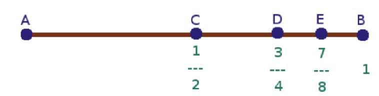
Il concetto di limite è il più sottile o per dirla con D'Alembert il più *metafisico* tra quelli fondamentali dell'analisi, avendo a che fare con quelli di *infinitamente grande* e di *infinitamente piccolo*.
L'origine storica di questo concetto va fatta risalire ai quattro paradossi di Zenone, che ci sono noti dalle opere di Aristotele.
I quattro paradossi sono:

1. **Paradosso del segmento**: sia dato un segmento **AB**; secondo Zenone non è possibile percorrerlo tutto da **A** a **B**: infatti partendo da **A** si dovrà prima raggiungere il punto **C** medio tra **A** e **B**, poi il punto **D** medio tra **C** e **B**, poi il punto **E** medio tra **D** e **B** e così via all'infinito senza che sia mai possibile arrivare in **B**.
2. **Paradosso di Achille e la tartaruga**: il pie' veloce Achille non riuscirà mai a raggiungere la tartaruga che cammina lentamente davanti a lui; infatti, detto t_0 l'istante iniziale dell'inseguimento, Achille dovrà prima raggiungere la posizione che la tartaruga occupava all'istante t_0, ma nel frattempo la tartaruga avrà percorso un sia pur piccolo tratto di strada; detto ora $t_1$questo secondo istante di tempo, Achille dovrà ora raggiungere il punto dove la tartaruga si trovava all'istante t_1 ma nel frattempo la tartaruga avrà compiuto un ulteriore piccolo tratto di strada e insomma Achille non raggiungerà mai la tartaruga perché gli mancherà sempre un sia pur piccolissimo tratto di strada.
3. **Paradosso della freccia**. Una freccia lanciata con l'arco non può muoversi; infatti in ogni istante (tempo di durata nulla) la freccia è ferma (spostamento nullo);

dunque il movimento, essendo una successione di stati di quiete, è impossibile.

4. **Paradosso dello stadio.** Nello stadio greco per le corse, due bighe si incrociano, la prima più veloce ha già passato il pilone e sta tornando indietro, la seconda più lenta sta ancora percorrendo il primo tratto. La velocità relativa tra le due bighe risulta diversa da quella "assoluta".

13.2 Il primo paradosso di Zenone: il segmento



Non è possibile andare da A a B

Non è possibile percorrere per intero un segmento AB: infatti partendo da A e prima di arrivare in B, bisognerà passare per il punto C medio tra A e B; e partendo da C prima di arrivare in B bisognerà passare per il punto D intermedio tra C e B e così via all'infinito; si dovrà passare per infiniti punti intermedi tra A e B e non si potrà mai arrivare in B. Questo il 1° paradosso di Zenone che in effetti ha a che fare con alcuni presupposti non dichiarati:

1. Che sia sempre possibile trovare un punto intermedio tra due punti del segmento (*postulato di densità*).
2. Che una somma di infiniti segmenti non possa essere contenuta in un segmento finito.
3. Che una somma di infiniti intervalli di tempo non possa essere contenuta in un intervallo di tempo finito.

Questo paradosso geometrico può tradursi anche nel linguaggio aritmetico come paradosso dei numeri razionali: non è possibile percorrere (= elencare) tutti i numeri razionali tra 0 e 1; infatti prima di arrivare a 1 si deve elencare ½ e poi ¾ ecc.ecc.

13.3 Somme e serie

Possiamo esprimere il primo paradosso in termini di ***serie;*** una serie è una somma di infiniti termini; in questo caso la somma *S è*:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

dove i punti di sospensione indicano che la somma ha *infiniti termini*. Ovviamente nessuno è in grado di scrivere infiniti termini, dunque deve essere data, come è in questo caso, una qualche regola che permetta di generare i termini successivi.

Qui la regola è che l'ennesimo termine vale $\frac{1}{2^n}$; in questo senso possiamo almeno in teoria generare qualsiasi termine della serie.

Intuitivamente si potrebbe pensare che una somma con infiniti addendi debba essere infinita, nel senso di infinitamente grande, maggiore di ogni numero finito.

In effetti non è così, questo è uno degli aspetti del paradosso.

La somma infatti si avvicina sempre più ad 1 ma resta sempre minore di 1 e non lo raggiunge mai; le somme temporanee (dette somme ridotte o più brevemente *ridotte*) valgono infatti:

$$S_1=\frac{1}{2}\ldots e\ manca\ ancora\ \frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{3}{4}\ldots e\ manca\ ancora\ \frac{1}{4}$$

$$S_3=\frac{7}{8}\ldots e\ manca\ ancora\ \frac{1}{8}$$

E quindi in effetti manca sempre un termine della forma $1/2^n$ e non si arriva mai ad avere il valore 1.

Usando il moderno linguaggio dell'algebra, la somma ennesima si scrive semplicemente:

$$S_n=1-\frac{1}{2^n}$$

che mostra come la somma resti sempre inferiore a 1.

13.4 I limiti

Possiamo ora immaginare due modi di scrivere il paradosso: *Ammettendo l'infinito attuale*, e cioè che abbia senso parlare di una somma di infiniti termini si può scrivere la serie così:

$$S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$

Non ammettendo l'infinito attuale, ma solo quello *potenziale*, si usa una notazione diversa, che fa uso del simbolo di limite:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

che si legge: *il limite per n che tende a infinito di S_n vale 1.*

Qual è la differenza tra queste due notazioni? Nel primo caso esiste effettivamente una somma S_∞ che ha infiniti termini e vale esattamente 1. Nel secondo non esiste alcuna somma infinita; la scrittura che usa il simbolo **lim** si limita ad affermare che la somma *finita* S_n si avvicina sempre più a 1 al crescere di *n*, e che la differenza tra la somma S_n e 1 può essere resa più piccola di un qualsiasi numero reale, per quanto piccolo.

In questa differenza tra due modi di scrivere il paradosso di Zenone c'è tutta la differenza tra il concetto di infinito attuale e di infinito potenziale (vedi paragrafo seguente).

13.5 La serie armonica

Si potrebbe ora pensare che una somma di infiniti termini che diventano sempre più piccoli sia necessariamente finita come quella del paradosso di Zenone. Ma nemmeno questo è vero; basta infatti considerare questa seconda serie:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

nota con il nome di *serie armonica* che altro non è che la somma dei reciproci dei numeri naturali (escluso lo zero ovviamente).

Si dimostra che questa serie *tende a infinito* nel senso che la somma finisce per diventare più grande di qualsiasi numero.

Raggruppiamo infatti i termini della serie armonica in questo modo:

$$T_0=1$$

$$T_1=\frac{1}{2}$$

$$T_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots che\ è\ maggiore\ di\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$T_3=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ldots che\ è\ maggiore\ di\ \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$S_4=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\ldots che\ è\ maggiore\ di\ \frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

Appare evidente che questa somma ha valore maggiore della

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots$$

che è evidentemente infinita.
Dunque la serie armonica *diverge* e si scrive:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty$$

Il limite della serie armonica per *n* che tende a infinito vale infinito.

13.6 Infinito attuale e infinito potenziale

I paradossi di Zenone e gli asintoti ci portano a considerare il problema dell'infinito in matematica; storicamente ci sono stati due tipi di approccio a questo problema, che sono stati già ricordati più sopra:

1. ***Infinito potenziale***: l'unico infinito ammissibile per la matematica greca; Euclide parla sempre di rette che si possono prolungare indefinitamente, senza mai affermare cose come *"la retta è infinita"*; in altri termini non esiste ed non ha senso un ente matematico infinito esiste solo una tendenza all'infinito.
2. ***Infinito attuale:*** si ammette che esistano numeri infiniti e che con essi si possano anche fare calcoli secondo regole più o meno simili a quelle dell'aritmetica e dell'algebra ordinaria. L'infinito attuale fu usato con

disinvoltura dai primi analisti da Leibniz ad Eulero; solo a fine Ottocento però si ebbe una vera teoria dell'infinito attuale, con i numeri transfiniti di Georg Cantor.

Se si ammettono i numeri infinitesimi, diventa quasi automatico ammettere anche i numeri infiniti e quindi l'infinito attuale; si definiscono infatti numeri infiniti e si indicano con la lettera greca omega, i reciproci dei numeri infinitesimi:

$$\omega = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{dx}$$

L'analisi classica secondo l'impostazione di Cauchy-Weierstrass si fonda sul concetto di infinito potenziale; ciononostante vi si usa comunemente la parola infinito (per esempio quando si dice *tendere a infinito*) e il classico simbolo ∞ in genere con l'avvertenza che si tratta di un *simbolo di comodo*. Per esempio la seguente notazione:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

che si legge: "il limite di x al quadrato per x che tende a più infinito è più infinito", va considerata come un'abbreviazione di comodo di questa espressione logica

$$\forall N \exists M : x > M \to x^2 > N$$

dove compaiono solo simboli di numeri finiti (N ed M); l'espressione significa: per ogni N esiste un M tale che se x supera M allora x^2 supera N. In sintesi x^2 cresce in modo illimitato, può superare qualsiasi N per quanto grande lo si possa fissare.

13.7 Infiniti attuali e numeri ordinali

Abbiamo visto che la NSA usa il simbolo ω per indicare i numeri non-standard infiniti. Si tratta dello stesso simbolo usato da Cantor per indicare i numeri ordinali transfiniti. Vediamo di che si tratta,

Il primo numero ordinale ω è il numero ordinale relativo all'insieme ordinato dei numeri naturali:

N = {0, 1, 2, 3 …}

Ovviamente anche il numero ordinale relativo ai seguenti insiemi ordinati:

$\mathbf{N_0}$ = {1, 2, 3, 4 …} *(naturali senza lo zero)*

P = {2, 4, 6, 8 …} *(numeri pari)*

è uguale ad ω essendo possibile mettere in corrispondenza biunivoca questi insiemi con **N.**

Viceversa è diverso il numero ω + 1 relativo all'insieme ordinato

N + {0} = {0, 1, 2, 3 ... 0}

che si rappresenta meglio come matrice:

$$\begin{array}{lllll} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & & & & \end{array}$$

infatti non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra **N** + {0} e **N** mantenendo l'ordine; lo è viceversa se si prescinde dall'ordine ma allora si passa nel campo dei numeri cardinali.

Proseguendo ω + 2 è il numero ordinale relativo all'insieme

$$\begin{array}{lllll} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 1 & & & \end{array}$$

2ω è il numero ordinale relativo all'insieme

$$\begin{array}{lllll} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array}$$

ω^2 è il numero ordinale relativo all'insieme

$$\begin{array}{lllll} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Il numero $2\omega^2$ è il numero ordinale relativo all'insieme formato da due piani uguali al precedente, Il numero $3\omega^2$ è quello relativo all'insieme formato da tre piani e così via.

Questi numeri ordinali infiniti sono distinti appunto in quanto numeri ordinali; se si prescinde dall'ordinamento, gli insiemi sopra riportati possono essere messi in corrispondenza biunivoca con **N** ed hanno quindi tutti la stessa *cardinalità*, quella del numerabile. Detto in altre parole il numero cardinale di un insieme di numeri naturali (comunque ordinati) è sempre lo

stesso, mentre se si tiene conto dell'ordine si ottengono infiniti numeri ordinali.
Questo problema portò Cantor a considerare i numeri cardinali più importanti e significativi di quelli ordinali; i numeri ordinali sono da allora rimasti in una sorta di limbo matematico.
Altro problema con i numeri ordinali è che cade la proprietà commutativa tra ordinali infiniti e numeri finiti; infatti $1 + \omega = \omega$, mentre $\omega + 1 > \omega$; la proprietà vale però tra i numeri ordinali; p.es. $2\omega + 3\omega = 3\omega + 2\omega = 5\omega$.
In questo senso si può concludere che, se gli infinitesimi sono numeri equivalenti (infinitamente vicini) allo zero, i numeri ordinali infiniti sono tutti equivalenti all'infinito numerabile.
In un certo senso sembra di riprendere l'idea di Eulero che considerava i numeri infinitesimi come simboli di comodo per rappresentare lo zero, dunque del tutto equivalenti allo zero.
Partendo dagli ordinali di Cantor gli infinitesimi sarebbero quindi definiti come segue:

$$\epsilon=\frac{1}{\omega}$$

$$\frac{\epsilon}{2}=\frac{1}{2\omega}$$

e in effetti la loro generazione può essere ridotta a uno schema simile al precedente:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{\omega}=\epsilon \\
\epsilon & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{3} & \frac{\epsilon}{4} & \ldots & \epsilon\frac{1}{\omega}=\epsilon^2 \\
\epsilon^2 & \frac{\epsilon^2}{2} & \frac{\epsilon^2}{3} & \frac{\epsilon^2}{4} & \ldots & \epsilon^2\frac{1}{\omega}=\epsilon^3
\end{array}$$

Un altro problema curioso è che essendo ω il primo e più piccolo numero ordinale, il suo reciproco ε verrebbe ad essere l'ultimo e più grande numero infinitesimo. Gli altri infinitesimi sarebbero $\varepsilon/2$, $\varepsilon/3$, $\varepsilon/4$ … e questa è una situazione che mal si concilia con gli infinitesimi di Leibniz.

13.8 Limiti, parte standard

Come si è già osservato nel paragrafo 10.13 il calcolo di un limite equivale al calcolo della parte standard. Alcuni hanno detto che la parte standard non è altro che un *limite camuffato,* ma in fondo, in un mondo dove la NSA fosse l'analisi più diffusa e conosciuta, si potrebbe anche dire il contrario. D'altra parte il parallelo funziona solo in parte; se è vero che il calcolo di un limite infinitesimo corrisponde esattamente al calcolo di una parte standard, diverso è il caso dei limiti infiniti, dove si deve semmai ricorrere all'algebra degli infiniti.
Useremo per questo nei calcoli il simbolo ω (omega) degli ordinali infiniti, che ricordiamo di aver definito come il reciproco di un infinitesimo ε:

$$\omega=\frac{1}{\epsilon}$$

ricordando che gli ordinali infiniti sono tutti *equivalenti* all'infinito classico (cardinalità del *numerabile*), cosa che esprimeremo come segue:

$$a+b\omega+c\,\omega^2\ldots\equiv\infty$$

In altri termini nel calcolo dei limiti, quando il risultato sarà ω o un suo qualsiasi multiplo o potenza o *espressione polinomia* in ω considereremo il risultato pari a infinito usando com'è tradizionale in analisi il simbolo ∞. Brevemente si converrà:

$$P(\omega)\equiv\pm\infty$$

dove il segno + o – sarà quello dell'infinito di ordine maggiore, p.es.

$$\omega^2-3\,\omega+2\equiv+\infty$$

$$-\omega^2+3\,\omega-2\equiv-\infty$$

Questa operazione di passaggio dai numeri ω all'infinito classico è analoga all'uso della funzione parte standard per gli infinitesimi. Là si scartava la parte infinitesima a fronte di quella standard, qui si scarta la parte finita a fronte di quella infinita.
Per indicare questa relazione usiamo il simbolo di equivalenza $\equiv$, simile ma non uguale a quello di infinitamente vicino $\simeq$.

Nei prossimi quattro paragrafi esamineremo i quattro classici casi di limite:

13.8.a 1° caso: infinito-finito

Consideriamo per esempio la funzione *y = 1/x*; quando *x* aumenta indefinitamente, o come si dice, *tende* a infinito, il suo reciproco diventa sempre più piccolo, ovvero *tende* a zero come è evidente da questa tabella calcolata per valori crescenti:

X	1	10	100	1000	10000	100000	…	ω
y	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…	ε

Osservando la tabella, l'intuizione ci dice che al crescere illimitato di x (cosa che si esprime con l'espressione: *tende a infinito*), la y si avvicina sempre più a zero (*tende a zero*).
Usando la notazione di *limite*, questa uguaglianza può scriversi invece nel seguente modo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Usando la funzione parte standard possiamo riassumere questa idea così:

$$\frac{1}{\omega}=\epsilon\to st\left(\frac{1}{\omega}\right)=0$$

che si legge "il limite di *f(x)* per *x* che tende a infinito è uguale a zero", Con la parola *limite* si vuol significare che la funzione 1/x si avvicina sempre più a zero senza mai raggiungerlo.
Spesso anche sui manuali di analisi classica si riassume questo limite in questa forma più semplice:

$$\frac{1}{\infty}=0$$

Si può calcolare in modo più rigoroso e veloce questo limite, sostituendo a x il numero 'infinito ω ovverosia il reciproco dell'infinitesimo, semplificando la funzione con le ordinarie regole dell'algebra e alla fine calcolare la parte standard:

$$st\left(\frac{1}{\omega}\right)=st\left(\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}}\right)=st(\epsilon)=0$$

o anche usando il simbolo di infinitamente vicino:

$$\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\frac{1}{\epsilon}}=\epsilon\equiv 0$$

In generale la regola per calcolare questo tipo di limiti è:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=st(f(\omega))=st\left(f\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

ovverosia per il limite per x che tende a infinito si calcola la parte standard della funzione, dopo aver sostituito la x con 1/ε.

13.8.b Altro esempio

Non sempre al tendere di *x* all'infinito si ottiene zero. Consideriamo per esempio questa seconda funzione:

$$y=\frac{1-x}{x}$$

quando *x tende* a infinito, la funzione si avvicina sempre più a -1, come è evidente da questa tabella calcolata per valori crescenti:

X	1	10	100	1000	10000	100000	...	ω
y	0	-0.9	-0.99	0.999	0.9999	0.99999	...	- 1 + ε

Anche qui l'osservazione della tabella ci suggerisce intuitivamente che la y si avvicina sempre più a -1, quando la x tende a infinito; cosa che con la notazione dei limiti si scrive:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x}=-1$$

Usando la regola vista sopra:

$$st(f(\omega))=st\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)=st(\epsilon-1)=-1$$

o equivalentemente:

$$f(\omega)=\frac{1-\omega}{\omega}=\frac{1-\frac{1}{\epsilon}}{\frac{1}{\epsilon}}=\frac{\epsilon-1}{1}=\epsilon-1\simeq-1$$

In generale il fatto che una funzione tenda a un valore finito L per x che tende a infinito, si può scrivere in uno dei seguenti modi:

$$f(\omega)=L\pm dx\approx L$$

$$st(f(\omega))=st(f(\frac{1}{dx}))=L$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

13.8.c 2° caso: finito-infinito

Consideriamo come esempio la funzione y = 1/x, al tendere di x a 0; *y* cresce illimitatamente come è evidente da questa tabella calcolata per valori decrescenti:

X	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0+ε
y	1	10	100	1000	10000	100000	+ω

Usando la notazione dei limiti si scrive:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

Usando gli infiniti attuali si può scrivere

$$f(\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}=\omega$$

in questo caso però dobbiamo distinguere se l'avvicinamento a zero avviene da numeri positivi (o *da destra*) o negativi (o *da sinistra*); il caso appena visto è quello dell'avvicinamento da destra; il secondo caso, da sinistra, dà risultati opposti:

X	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	...	ε
y	-1	-10	-100	-1000	-10000	-100000	...	-ω

E dunque si deve scrivere:

$$f(-\epsilon)=-\frac{1}{\epsilon}=-\omega$$

o usando i limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

che si legge: “limite per x che tende a zero meno *(da sinistra)* vale meno infinito.

Il caso precedente va invece scritto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

che si legge: “limite per x che tende a zero più *(da destra)* vale più infinito.

Più in generale una funzione può tendere a infinito nei dintorni di un qualsiasi valore x_0.

Consideriamo come esempio la funzione

$$y=\frac{1-x}{1+x}$$

al tendere di x a -1 *y* cresce illimitatamente come è evidente da questa tabella calcolata per x che si avvicina a -1 da destra (valori maggiori):

X	0	-0.5	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-1+ε
y	1	3	19	199	1999	19999	+ω

Sostituendo *x* = *-1* + *ε* si può scrivere

$$f(-1+\epsilon)=\frac{1-(-1+\epsilon)}{1-1+\epsilon}=\frac{2-\epsilon}{\epsilon}=\frac{2}{\epsilon}-1=+2\omega-1\equiv+\infty$$

Usando i limiti si scrive:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1-x}{1+x}=+\infty$$

Se invece la funzione tende a -1 da sinistra *(valori minori*) si ha la tabella

X	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1-ε
y	-3	-5	-21	-201	-2001	-20001	-ω

Usando gli infiniti attuali si può scrivere e calcolare:

$$f(-1-\epsilon)=\frac{1-(-1-\epsilon)}{1-1-\epsilon}=\frac{2+\epsilon}{-\epsilon}=-\frac{2}{\epsilon}-1=-2\omega-1\equiv-\infty$$

Usando gli infiniti potenziali e i limiti si scrive:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-x}{1+x}=+\infty$$

in generale quindi il valore del limite si può calcolare usando infiniti e infinitesimi.
La notazione generale usando i limiti è:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)=\pm\infty$$

e il calcolo si può fare usando numeri infiniti e infinitesimi:

$$f(x_0\pm\epsilon)=\dots P(\omega)\simeq\pm\infty$$

calcolando la funzione per x_0 + ε si calcola il suo limite da destra, calcolandola per x_0 – ε si calcola il suo limite da sinistra.

13.8.d 3° caso: infinito-infinito

Consideriamo la funzione y = x^2, al crescere di x cresce illimitatamente come è evidente da questa tabella calcolata per valori decrescenti:

x	1	2	4	8	10	100	...	+ω
y	1	4	16	64	100	10000	...	+ω

Usando la notazione dei limiti si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\omega^2\simeq+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=(-\omega)^2\simeq+\infty$$

In generale quindi per il calcolo di questi limiti è sufficiente sostituire alla variabile x il numero ω oppure se è più comodo 1/ε e calcolare il risultato; se questo contiene ω il risultato è infinito secondo le regole viste sopra.
Per esempio si debba calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+1}$$

sostituendo x con ω e mettendo in evidenza al numeratore e al denominatore si ha

$$\frac{\omega^3-2\omega^2+1}{\omega^2+1}=\frac{\omega^3\left(1-\frac{2}{\omega}+\frac{1}{\omega^3}\right)}{\omega^2\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)}=\omega\frac{1-2\,dx+dx^3}{1+dx^2}\equiv\omega\equiv\infty$$

ma in fondo basterebbe osservare che eseguendo la divisione dei due polinomi il primo termine, quello di grado maggiore sarà x, quindi ω che prevarrà su tutti gli altri termini. Detto in modo leggermente diverso in un polinomio per valori molto grandi (tendenti a infinito) il termine di grado maggiore è quello che prevale; basta quindi fare il quoziente di questi due termini per ottenere il limite.
In generale quando si dividono due polinomi, il limite è infinito tutte le volte che il grado del polinomio al numeratore è superiore a quello del denominatore; se i gradi sono uguali il limite è finito; se il grado al numeratore è inferiore a quello del denominatore il limite è zero.

13.8.e 4° caso: finito-finito

Questo quarto caso non ha a che fare con gli infiniti:

Consideriamo la funzione $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ che per *x* = *1* non è definita; se facciamo avvicinare *x* a -1 da valori maggiori (ovvero da destra) otteniamo, calcolando a mano o con una calcolatrice tascabile i valori successivi:

X	2	1,5	1,1	1.01	1,001	1,0001	... 1
y	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	... 2

Si intuisce che all'avvicinarsi di *x* a *1* da destra, *y* si avvicina sempre più a *2,* cosa che si esprime usando la notazione di limite:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

L'avvicinamento può avvenire anche da sinistra (valori minori) di 1;

X	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999	... 1
y	1	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999	... 2

Anche qui si intuisce che all'avvicinarsi di *x* a *1*, *y* si avvicina sempre più a *2*, e la cosa si esprime usando la notazione di limite:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}=2$$

che si legge: *limite per x che tende a 1 da sinistra di ...*
in questo caso il limite da destra è uguale a quello da sinistra.
L'intuizione ci dice che il limite vale 2, ma ovviamente è opportuno calcolare il limite in modo più rigoroso (e più veloce), cosa che può farsi usando la parte standard. In pratica invece di calcolare la funzione per valore di poco maggiori di 1, si sostituisce x con *(1 + dx)* (uno più un infinitesimo) per il limite da destra e con *(1 – dx*) per il limite da sinistra. Si calcola la funzione con le regole ordinarie dell'algebra e alla fine si calcola la parte standard.
Il limite da destra può allora calcolarsi come segue:

$$st\left(\frac{(1+dx)^2-1}{(1+dx)-1}\right)=st\left(\frac{1+2\,dx+dx^2-1}{dx}\right)=st\left(\frac{2\,dx+dx^2}{dx}\right)=st(2+dx)=2$$

e in modo del tutto analogo si calcola il limite da sinistra:

$$st\left(\frac{(1-dx)^2-1}{(1-dx)-1}\right)=st\left(\frac{1-2\,dx+dx^2-1}{-dx}\right)=st\left(\frac{-2\,dx+dx^2}{-dx}\right)=st(2-dx)=2$$

13.9 Limiti e parte standard

Il seguente è uno specchietto riassuntivo dei diversi casi di limiti – parte standard:

Limite	**Calcolo**	**Asintoti**
$\lim_{x\to+x_0^-} f(x)=L$ *(limite da sinistra)*	$st(f(x_0-dx))=L$ $f(x_0-dx)\simeq L$	Nessun asintoto
$\lim_{x\to+x_0^+} f(x)=L$ *(limite da destra)*	$st(f(x_0+dx))=L$ $f(x_0+dx)\simeq L$	
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$	$st(f(\omega))=st(f(\frac{1}{dx}))=L$	Asintoto orizzontale y = L
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$	$st(f(-\omega))=st(f(-\frac{1}{dx}))=L$	
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$ *(limite da sinistra)*	$f(x_0-dx)=P(\omega)\equiv\pm\infty$	Asintoto verticale x = x0
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$ *(limite da destra)*	$f(x_0+dx)=P(\omega)\equiv\pm\infty$	
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$	$f(\omega)=P(\omega)\equiv\pm\infty$	Possibile asintoto obliquo
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$	$f(-\omega)=P(\omega)\equiv\pm\infty$	

13.10 Limiti notevoli

Consideriamo ora tre limiti notevoli di funzioni non algebriche:

1. $\lim_{x\Rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}$

basta qui ricordare che $\sin(dx)\simeq dx$ e sostituire a *x (0+dx)* ottenendo

$$\lim_{x\Rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=st\left(\frac{\sin(0+dx)}{dx}\right)=st\left(\frac{dx}{dx}\right)=1$$

Lo stesso risultato si ottiene anche da sinistra *(0-dx)*

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = st\left(\frac{\sin(0-dx)}{-dx}\right) = st\left(\frac{-dx}{-dx}\right) = 1$$

2. $\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

ma $\cos(dx) \simeq 1$ e quindi sostituendo a *x (0+dx)* si ha

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = st\left(\frac{1-\cos(0+dx)}{dx}\right) = st\left(\frac{1-1}{dx}\right) = 0$$

3. $\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$

basta ricordare che è $e^{(dx)} \simeq 1+dx$ e sostituire a *x (0+dx)* ottenendo

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = st\left(\frac{1+dx-1}{dx}\right) = \frac{dx}{dx} = 1$$

13.11 La regola de l'Hopital

Un quoziente di funzioni che tendono o valgono entrambe zero o infinito, costituisce una forma di indeterminazione, in simboli:

$$\frac{\infty}{\infty} = indeterminata\,;\, \frac{0}{0} = indeterminata$$

Questo non vuol dire che il limite non esista, ma solo che può assumere qualsiasi valore e il calcolo va fatto caso per caso. Di solito occorre un qualche espediente algebrico o di altra natura per calcolare questo tipo di limiti.

Una regola generale per calcolare questi limiti esiste ed è quella dovuta al marchese Guillaume François Antoine de l'Hopital, contemporaneo di Leibniz e Newton, allievo di Bernoulli e autore di uno dei primi manuali di analisi.

Nel caso *0/0*, e quindi con $f(x_0) = g(x_0) = 0$, questa regola si giustifica con pochi passaggi algebrici e la definizione di derivata.

$$\lim_{x \Rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = st\left(\frac{f(x_0+dx)}{g(x_0+dx)}\right) = st\left(\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{g(x_0+dx)-g(x_0)}\right) =$$

$$= st\left(\frac{\dfrac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}}{\dfrac{g(x_0+dx)-g(x_0)}{dx}}\right) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Al secondo passaggio sono stati sottratti sopra e sotto $f(x_0)$ e $g(x_0)$ che valgono entrambi zero. Al terzo numeratore e denominatore sono stati divisi entrambi per *dx* in modo da ritrovare la definizione di derivata.
In definitiva la regola può così definirsi:

Il limite per x che tende a un valore c del quoziente di due funzioni che si valgono entrambe zero per x = c è uguale al limite, se esiste, del quoziente delle derivate delle due funzioni.

In simboli:

$$\lim_{x \Rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \Rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Per il caso ∞/∞ basta scambiare le due funzioni e cioè considerare il quoziente tra il reciproco della seconda e il reciproco della prima per ottenere un limite della forma 0/0.

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\dfrac{1}{g(x_0)}}{\dfrac{1}{f(x_0)}} = \frac{0}{0}$$

Dunque il limite se esiste è il reciproco del limite 0/0 e la regola vale anche in questo caso.

N.B. La regola vale **solo** se le due funzioni sono entrambe nulle (o entrambe infinite) per $x = x_0$. Non può essere applicata in alcun altro caso.
La regola può anche essere applicata a ripetizione.

Esempi:

1. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \Rightarrow 1} \frac{x^2 - 2\mathrm{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \Rightarrow 1} \frac{2\mathrm{x} - 2}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

   Nota: il limite si poteva anche calcolare osservando che la frazione ha al numeratore il quadrato del denominatore e quindi:

$$\lim_{x \Rightarrow 1} \frac{x^2 - 2\mathrm{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \Rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x - 1} = \lim_{x \Rightarrow 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

2. Calcolare il limite notevole:

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

   che è della forma 0/0; applicando l'Hopital si ha:

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \Rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

   risultato che coincide con quello precedentemente trovato.

3. Calcolare il limite notevole:

$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

   che è della forma 0/0; applicando l'Hopital si ha:

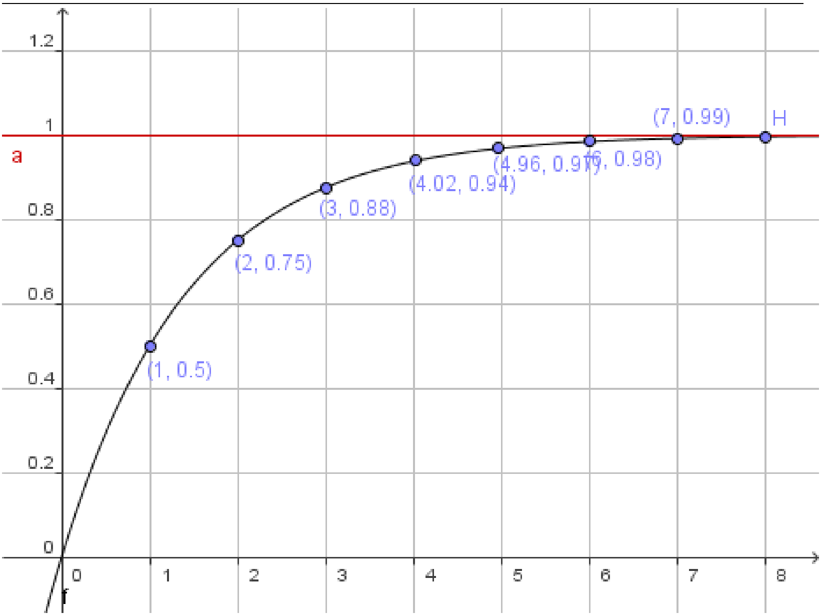
$$\lim_{x \Rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \Rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

   risultato che coincide con quello precedentemente trovato.

4. Calcolare il limite, sempre della forma 0/0:

$$\lim_{x \Rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \Rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \Rightarrow 1} \frac{-2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{-2\sqrt{1}}{1^2} = -2$$

13.12 Asintoti di una funzione



La retta y = 1 (in rosso) si dice asintoto orizzontale

Se rappresentiamo graficamente il primo paradosso di Zenone otteniamo un grafico come quello qui sopra.
Qui la somma S_n relativa a numeri interi n, diventa la funzione

$$y=1-\frac{1}{2^x}$$

che assume valori anche per x decimale, p.es. Per x = 1,5 si ha:

$$f(1{,}5)=f\left(\frac{3}{2}\right)=1-\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=1-\frac{1}{\sqrt{8}}\approx 0{,}6464\ldots$$

Osservando il grafico si nota che la curva si avvicina sempre più alla retta *y* = *1* senza in verità mai toccarla. Una retta di questo tipo si dice *asintoto*. In questo caso essendo la retta parallela all'asse delle *x*, si dirà *asintoto orizzontale*. Naturalmente sono possibili anche asintoti *verticali* e *obliqui*.

13.13 Asintoti verticali

Data una funzione *f(x)* si dice asintoto verticale una retta verticale $x = x_0$ alla quale il grafico della funzione si avvicina indefinitamente senza mai toccarla.
In altri termini quando per $x = x_0$ la funzione assume valori infiniti.
Si può dire che si ha asintoto verticale se

$$f(x_0 \pm dx) = P(\omega) \equiv \infty$$

In parole povere si può dire che la funzione *f(x)* ha un asintoto verticale per $x = x_0$ se incrementando o decrementando la funzione di un infinitesimo, questa assume valori infiniti.
Nel linguaggio dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Di solito gli asintoti verticali si trovano in corrispondenza di valori della x per i quali la funzione non è definita, ma non necessariamente.
Occorre poi distinguere:

1. se il limite è infinito positivo (+∞) o negativo (-∞);
2. se x tende a infinito da sinistra (da valori minori) o da destra (valori maggiori).

È sufficiente calcolare il valore della funzione immediatamente a destra e a sinistra di x_0, e cioè per $x_0 + dx$ e per $x_0 - dx$. Se si ottiene un valore infinito (+∞ o -∞) c'è effettivamente un asintoto verticale, se invece si ottiene un valore finito allora siamo in presenza di una discontinuità eliminabile.
Si possono distinguere due tipi di asintoto verticale:

1. Se il limite è infinito positivo da destra e negativo da sinistra (o viceversa) si tratta di un *asintoto semplice*.
2. Se il limite è infinito positivo (o negativo) sia da destra sia da sinistra si tratta di un *asintoto doppio*.

È anche possibile che il limite sia infinito da una parte e finito dall'altra. In questo caso c'è un asintoto solo dalla parte dove il limite è infinito.

13.13.a L'esempio più semplice.

$$y=\frac{1}{x}$$

(iperbole equilatera)

Questa funzione non è definita per x = 0, dunque potrebbe esserci un asintoto.

Calcoliamo il limite per x che tende a 0 da sinistra:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$$

che si calcola facilmente sostituendo a *x 0 - ε* .

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0-\epsilon}=-\omega\equiv-\infty$$

Analogamente si calcola il limite per che tende a zero da destra.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0+\epsilon}=+\omega\equiv+\infty$$

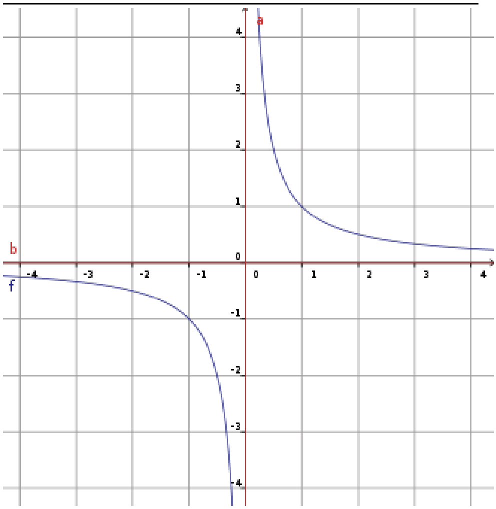


Illustrazione 2: L'iperbole con i suoi due asintoti

I due limiti sono entrambi infiniti ma con segno discorde, si tratta quindi di un asintoto verticale semplice, di equazione x = 0, che poi altro non è che l'asse delle y.

13.13.b Esempio 1

$$y=\frac{x+1}{x-3}$$

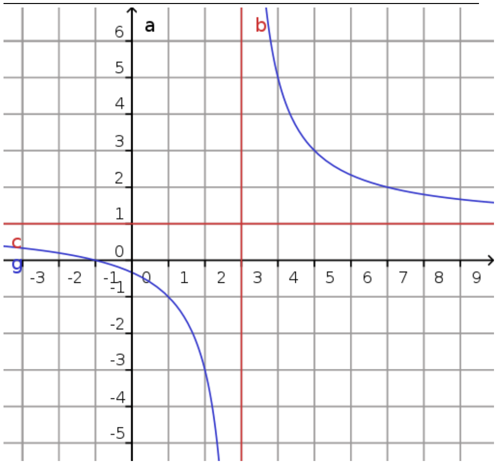
Per x = 3 la funzione non è definita (il denominatore x - 3 si annulla); potrebbe quindi esserci un asintoto verticale; per verificarlo calcoliamo la funzione per 3 + ε :

$$f(3+\epsilon)=\frac{3+\epsilon+1}{3+\epsilon-3}=\frac{4+\epsilon}{\epsilon}=\frac{4}{\epsilon}+1=+4\omega+1\equiv+\infty$$

e per 3 - dx:

$$f(3-\epsilon)=\frac{3-\epsilon+1}{3-\epsilon-3}=\frac{4-\epsilon}{-\epsilon}=-\frac{4}{\epsilon}+1=-4\omega+1\equiv-\infty$$

dunque la funzione tende a infinito a destra e a meno infinito a sinistra; c'è un *asintoto verticale semplice*, di equazione x = *3*, com'è evidente nel grafico della funzione, riportato in questa pagina.



L'iperbole con i suoi due asintoti

13.13.c Esempio 2

$$y=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Per *x* = *0* la funzione non è definita; potrebbe quindi esserci un asintoto verticale; per verificarlo calcoliamo la funzione per *0* + ***dx*** = ***dx:***

$$f(dx)=dx^2+\frac{1}{dx^2}=dx^2+\omega^2=+\omega$$

e analogamente per *0* - ***dx*** = -***dx***:

$$f(-dx)=(-dx)^2+\frac{1}{(-dx)^2}=dx^2+\frac{1}{dx^2}=dx^2+\omega^2=+\omega$$

dunque la funzione tende a infinito positivo a destra e a sinistra; c'è un ***asintoto verticale doppio***.

13.13.d Esempio 3

$$y=\frac{x^2-1}{x+1}$$

Per x = -1 la funzione non è definita; potrebbe quindi esserci un asintoto verticale; per verificarlo calcoliamo la funzione a destra e sinistra di -1:

$$f(-1+dx)=\frac{(-1+dx)^2-1}{-1+dx+1}=\frac{-2\,dx+dx^2}{dx}=-2+dx\equiv-2$$

$$f(-1-dx)=\frac{(-1-dx)^2-1}{-1-dx+1}=\frac{2\,dx+dx^2}{-dx}=-2-dx\equiv-2$$

dunque la funzione non va a infinito nelle immediate vicinanze di *x* = *-1* ma vale -2. Questo risultato è dovuto al fatto che la frazione di sopra è semplificabile:

$$y=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1 \qquad (per\ x\neq-1)$$

e quindi non c'è alcun asintoto; questo risultato ci dice che la funzione può essere completata per x = -1 ponendo y = -2.

13.14 Asintoti orizzontali

Data una funzione *y = f(x)*, si chiama asintoto orizzontale una retta parallela all'asse delle x, alla quale la curva si avvicina sempre più quando x tende a infinito (diventa sempre più grande). Nel disegno a lato vediamo l'asintoto orizzontale di un'iperbole equilatera, disegnato in rosso.
Perché ci sia un asintoto orizzontale occorre che la funzione abbia un valore finito per *x* infinito e cioè:

$$f(\omega)=f\left(\frac{1}{\epsilon}\right)=L$$

con L numero reale finito; allora si ha un asintoto orizzontale di equazione y = L.
Occorre distinguere tra infinito positivo e infinito negativo; per le funzioni algebriche fratte di solito c'è solo un asintoto orizzontale ma per altre funzioni possono anche darsi due asintoti orizzontali distinti.
Usando la notazione di limite se si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$$

allora c'è un asintoto orizzontale *y = L*.
In particolare se

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

l'asintoto orizzontale è l'asse delle *x (y = 0)*. Questo avviene per esempio, per l'iperbole equilatera *y = 1/x* vista in precedenza.

13.14.a Metodo algebrico per gli asintoti orizzontali

Se si tratta di una frazione algebrica è sufficiente eseguire la divisione dei due polinomi; se il quoziente è una costante *k*, allora c'è un asintoto orizzontale con equazione *y = k*. Se invece il quoziente è un polinomio di grado maggiore di 1, non c'è asintoto obliquo.
Ovviamente perché il quoziente sia 1, è necessario che il numeratore della frazione sia di grado maggiore esattamente di 1 rispetto a quello del denominatore.
Questo ci fornisce una semplice regoletta per decidere velocemente se una funzione algebrica fratta ha un asintoto

orizzontale: se una funzione algebrica fratta ha il denominatore di grado superiore esattamente di 1 a quello del denominatore allora vi è un asintoto obliquo. Infatti il quoziente sarà un polinomio di 1° grado.
Se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado vi è asintoto orizzontale; infatti il quoziente sarà una costante k e l'asintoto è *y* = *k*.
Se il numeratore ha grado inferiore al denominatore allora il quoziente vale zero e vi è l'asintoto orizzontale *y* = *0*. (l'asse delle *x*)

13.14.b Esempio

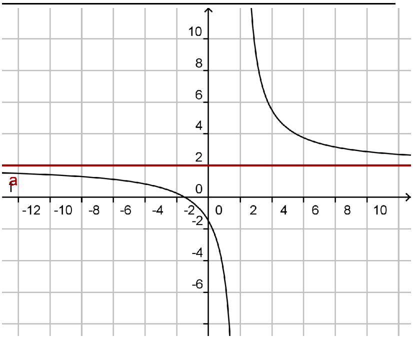
Cercare l'eventuale asintoto orizzontale di

$$y=\frac{2x+3}{x-2}$$

Metodo algebrico: eseguendo la divisione si ha

```
 2x + 3 | x - 2
-2x + 4 |-------
--------| 2
    + 7 |
```

dunque la funzione può scriversi come $2+\frac{7}{x-2}$, e l'asintoto orizzontale è y = 2 (vedi figura).



L'asintoto è orizzontale, y = 2

Metodo analitico: calcoliamo la funzione per x infinito:

$$st(f(\omega))=st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right)=st\left(\frac{\frac{2}{dx}+3}{\frac{2}{dx}-2}\right)=st\left(\frac{\frac{2+3\,dx}{dx}}{\frac{1-2\,dx}{dx}}\right)=st\left(\frac{2+3\,dx}{1-2\,dx}\right)=2$$

Dunque c'è un asintoto orizzontale *y* = 2.

13.15 Asintoti obliqui

La ricerca degli asintoti obliqui è analoga a quella degli asintoti orizzontali. Si possono seguire due metodi:

- *Metodo algebrico* (se si tratta di una frazione algebrica): dividere i due polinomi con la regola di Ruffini; il quoziente, se è un polinomio di 1° grado, ci dà l'equazione dell'asintoto obliquo.
- *Metodo dei limiti* (valido per qualsiasi funzione *y* = *f(x)*): calcolare il limite del quoziente f(x)/x per x→∞; se tale limite esiste e vale una costante *m*, questa ci dà il coefficiente angolare dell'asintoto. Il limite di *f(x) - mx* ci dà poi il termine noto *q*, e l'asintoto obliquo ha quindi equazione *y* = *mx* + *q*.

Esempio n.1 un'iperbole

Cercare l'eventuale asintoto obliquo di

$$y=\frac{x^2+3}{x^2}$$

- **Metodo algebrico.** Eseguendo la divisione si ha

```
  x² + 3 | x
-x²      |-------
--------| x
     + 3 |
```

dunque la funzione può scriversi come $x+\frac{3}{x}$, e l'asintoto obliquo è y = x (bisettrice del primo quadrante).

- **Metodo dei limiti**. Calcoliamo innanzitutto:

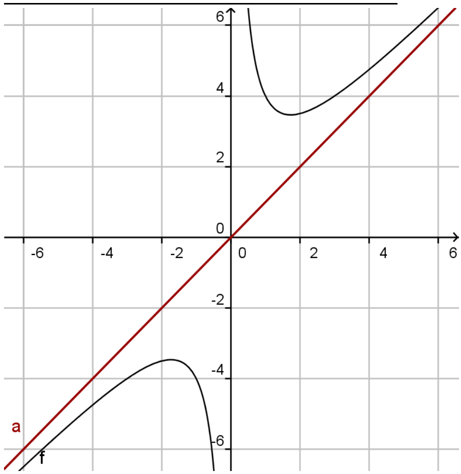
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2}=st\left(\frac{\omega^2+3}{\omega^2}\right)=st\left(1+\frac{3}{\omega^2}\right)=st(1+3\epsilon^2)=1$$

Dunque è *m* = *1*. Calcoliamo ora:

$$3\lim_{x\Rightarrow\infty}\frac{x^2+3}{x}-x=\lim_{x\Rightarrow\infty}\frac{x^2+3-x^2}{x}=\lim_{x\Rightarrow\infty}\frac{3}{x}=st\left(\frac{3}{\omega}\right)=st(3\epsilon)=0$$

e quindi è q = 0; l'asintoto obliquo è *y* = *x*.

- I due asintoti sono evidenti nel grafico della curva qui sotto.



L'asintoto coincide con la bisettrice del primo quadrante

14 - Approssimazione polinomiale

Funzioni come seno, coseno, esponenziale, logaritmo sono trascendenti nel senso che non si possono calcolare con le ordinarie 4 operazioni, salvo casi "fortunati" come sin(30°) o $\log_2(4)$...

Si possono però approssimare con tecniche di vario genere. La più semplice è quella di usare un opportuno polinomio; si usano i polinomi perché sono le funzioni algebriche più generali che si possono calcolare sempre per qualsiasi valore; infatti contengono solo addizioni e moltiplicazioni.

Il problema è di definire le condizioni alle quali deve soddisfare un polinomio per essere considerato una "buona" approssimazione della funzione trascendente.

Una soluzione molto semplice è data dal polinomio di Maclaurin.

Il polinomio di Maclaurin di grado n che meglio approssima una data funzione f(x) è quello che ha lo stesso valore della funzione per x = 0 e inoltre la stessa derivata prima per x = 0, la stessa derivata seconda e così via fino a una prefissata derivata ennesima.

In questo modo si impongono n+1 condizioni per n+1 incognite (i coefficienti del polinomio) il che vuol dire che avremo un sistema lineare e la soluzione sarà unica!

14.1 Primo esempio: approssimiamo il coseno

Come primo esempio proviamo a trovare il polinomio di Maclaurin di grado 2 per la funzione coseno, y = cos(x) le derivate sono come è ben noto

$$y' = -\sin(x)$$
$$y'' = -\cos(x)$$

Il polinomio può allora scriversi nella forma P(x) = a + bx + cx^2;
Le sue derivate rispetto a x sono

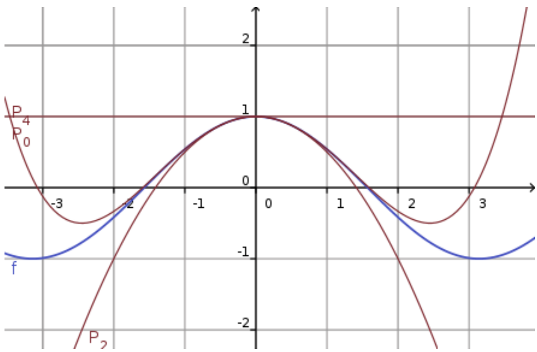
$$P'(x) = b + 2\mathrm{cx}$$
$$P(\mathrm{x}) = 2\mathrm{c}$$

Si tratta ora di imporre che funzione e derivate coincidano per x=0; riassumiamo il procedimento nel seguente specchietto:

Coseno e derivate	*Polinomio e derivate*	*Coefficienti*
cos(0) = 1	P(0) = a	a = 1
-sin(0) = 0	P'(0) = b	b = 0
-cos(0) = -1	P"(0) = 2c	c = -1/2

In definitiva il polinomio di Maclaurin di 2° grado del coseno è

$$y=1-\frac{1}{2}x^2$$



Il polinomio di Maclaurin di 2° grado (parabola) per il coseno e quello di 4° grado

Nella figura a lato possiamo confrontare il polinomio P2 con il cosinusoide C. Appare evidente che nelle vicinanze dell'asse y (x = 0) le due curve si sovrappongono molto bene, mentre mano mano che ci si allontana da x = 0, le curve divergono e quindi l'approssimazione fornita dal polinomio di Maclaurin diventa sempre più scadente.

Con un procedimento del tutto simile si ricava il polinomio di 4° grado del coseno:

$$y=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$$

Nella figura questo polinomio è indicato con P4, ed appare evidente che P4 fornisce un'approssimazione del coseno già molto migliore di P2.

In generale tanto più alto è il grado del polinomio, tanto più accurata l'approssimazione fornita da Maclaurin, comunque sempre migliore nelle vicinanze di x = 0.

Quando n tende a infinito la differenza tra polinomio di Maclaurin e coseno tende a zero e quindi, in un certo senso il coseno può vedersi come un polinomio con infiniti termini.
In generale il polinomio di Maclaurin di grado 2n per il coseno vale

$$\cos(x) \approx P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... + (-1)^n \frac{1}{2n!}x^{2n}$$

dove l'espressione $(-1)^n$ è solo un artificio per indicare l'alternarsi dei segni.
In seguito si dimostra la forma generale del polinomio di MacLaurin.
Si noti infine che il polinomio di Maclaurin dl coseno contiene solo termini di grado pari, cosa prevedibile essendo il coseno una funzione pari.
N.B. Il polinomio, come sempre in Analisi, va calcolato in radianti non in gradi!
Se invece che x=0 si usa un altro valore x_0 si hanno i cosiddetti polinomi di Taylor.
Basta effettuare una traslazione sostituendo a x $(x - x_0)$. Per esempio per x = π si ha

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + ... + (-1)^n \frac{1}{2n!}(x-\pi)^{2n}$$

In questo caso ovviamente l'approssimazione più accurata si avrà nelle vicinanze di x = π .
L'approssimazione con Taylor e Maclaurin ha il difetto di non essere uniforme; molto buona nelle vicinanze di x_0 peggiora all'allontanarsi da questo valore. Si sono allora cercati polinomi che diano un'approssimazione con precisione uniforme in un dato intervallo, per esempio i polinomi di Cebicef, ma l'argomento esula dagli scopi di questo libro.

14.2 Secondo esempio: approssimiamo il seno

Come secondo esempio proviamo a trovare il polinomio di Maclaurin di grado terzo per la funzione seno, *y = sin(x)* le cui prime derivate sono:

$$y' = \cos(x)$$
$$y'' = -\sin(x)$$
$$y''' = -\cos(x)$$

Il polinomio di terzo grado può scriversi:

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Le sue derivate rispetto a *x* sono

$$P'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$
$$P''(x) = 2c + 6dx$$
$$P'''(x) = 6d$$

Si tratta ora di imporre che funzione e derivate coincidano per *x = 0*; riassumiamo il procedimento nel seguente specchietto:

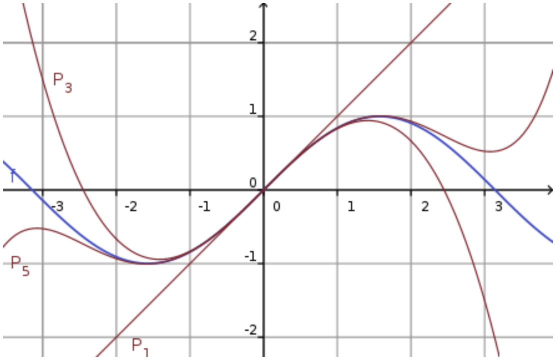
Funzione e derivate	Polinomio e derivate	Coefficienti
sin(0) = 0	*P(0) = a*	*a = 0*
cos(0) = 1	*P'(0) = b*	*b = 1*
-sin(0) = 0	*P''(0) = 2c*	*c = 0*
-cos(0) = -1	*P'''(0) = 6d*	$d = \frac{1}{6}$

In definitiva il polinomio P_3 di Maclaurin di 3° grado del seno è

$$y = x - \frac{1}{6}x^3$$

mentre quello di 1° grado (retta) è banalmente *y= x* che è poi la tangente nell'origine al sinusoide. Come tangente è effettivamente la retta che meglio approssima il sinusoide.

Nella figura a lato possiamo confrontare il polinomio con il sinusoide. Come per il coseno appare evidente che nelle vicinanze di *x* = *0* l'approssimazione è molto buona, mentre mano mano che ci si allontana da x = 0, diventa sempre più scadente.



I primi polinomi (P1, P3, P5) di Maclaurin per la funzione seno.

Con un procedimento del tutto simile si ricava il polinomio di 5° grado del coseno:

$$y=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

Nella figura questo polinomio è indicato con P_5, ed appare evidente che fornisce un'approssimazione del seno già molto migliore di P_3.

In generale tanto più alto è il grado del polinomio, tanto più accurata l'approssimazione fornita da Maclaurin, comunque sempre migliore nelle vicinanze di x = 0.

Come per il coseno il seno può vedersi come un polinomio con infiniti termini.

In generale il polinomio di Maclaurin di grado 2n per il seno vale

$$\sin(x)\approx P(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$$

dove l'espressione $(-1)^n$ è solo un artificio per indicare l'alternarsi dei segni.

Si noti infine che il polinomio di Maclaurin del seno contiene solo termini di grado dispari, cosa prevedibile essendo il seno una funzione dispari.

Se invece che x=0 si usa un altro valore x_0 si hanno i cosiddetti polinomi di Taylor.

Basta effettuare una traslazione sostituendo a x $(x - x_0)$. Per esempio per x = π si ha
In questo caso ovviamente l'approssimazione più accurata si avrà

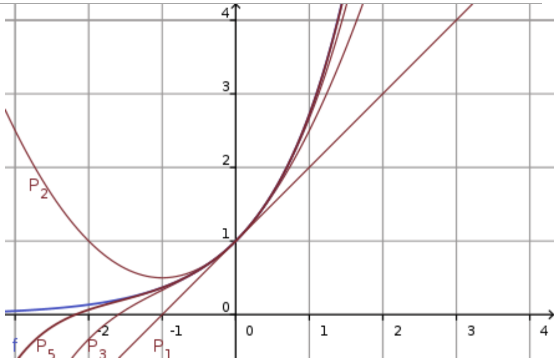
$$\sin(x) \approx (x-\pi) - \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1}$$

nelle vicinanze di x = π .

14.3 Terzo esempio: approssimiamo l'esponenziale

Come terzo esempio proviamo a trovare il polinomio di Maclaurin di grado terzo per la funzione esponenziale $y = e^x$ le cui derivate sono come noto tutte uguali :

$$y' = e^x$$
$$y'' = e^x$$
$$y''' = e^x$$



I primi polinomi (P_1, P_2, P_3, P_5) di Maclaurin per la funzione esponenziale.

Il polinomio può allora scriversi nella forma

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Le sue derivate rispetto a x sono

$$P'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$
$$P''(x) = 2c + 6dx$$
$$P'''(x) = 6d$$

Si tratta ora di imporre che funzione e derivate coincidano per x = 0; riassumiamo il procedimento nel seguente specchietto:

Funzione e derivate	Polinomio e derivate	Coefficienti
$e^0 = 1$	$P(0) = a$	$a = 1$
$e^0 = 1$	$P'(0) = b$	$b = 1$
$e^0 = 1$	$P''(0) = 2c$	$c=\frac{1}{2}$
$e^0 = 1$	$P'''(0) = 6d$	$d=\frac{1}{6}$

In definitiva il polinomio P_3 di Maclaurin di 3° grado dell'esponenziale è

$$y=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

mentre quello di 1° grado (retta) è banalmente *y*= *x* che è poi la tangente nell'origine al sinusoide. Come tangente è effettivamente la retta che meglio approssima il sinusoide.
Il grafico a lato mostra anche qui che nelle vici-nanze di *x* = *0* le due curve si sovrappongono molto bene, mentre mano mano che ci si allontana da x = 0, l'approssimazione diventa sempre più scadente.
Con un procedimento del tutto simile si ricavano i polinomi di 5° grado maggiore, per esempio di 5° grado:

$$y=1+x+\frac{1}{1}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5$$

Nella figura questo polinomio è indicato con P_5, ed appare evidente che fornisce un'approssimazione del seno già molto migliore di P_3.
In generale il polinomio di Maclaurin di grado n per l'esponenziale vale:

$$e^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+\frac{1}{n!}x^n$$

Questa volta non essendo l'esponenziale né pari né dispari il polinomio di Maclaurin contiene termini di tutti i gradi possibili.
Per x = 1 si ottiene una formula che permette di approssimare il

numero ***e***:

$$e=e^1\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}$$

che corrisponde esattamente alla formula trovata da Eulero (par. 11.12.b)

Per avere il polinomio di Taylor, basta effettuare la traslazione sostituendo a x (x - x_0). Per esempio per x = 3 si ha

$$e^x\approx 1+(x-3)+\frac{1}{2!}(x-3)^2+\frac{1}{3!}(x-3)^3+...+\frac{1}{n!}(x-3)^n$$

In questo caso ovviamente l'approssimazione più accurata si avrà nelle vicinanze di x = 3 .

14.4 Forma generale del polinomio di MacLaurin

Lo specchietto seguente simile a quello usato per trovare il polinomio di Maclaurin del coseno, generalizza quel metodo, permettendo di ricavare una forma generale del medesimo.

Condizione di Maclaurin	Polinomio e sue derivate	per x = 0 vale ...	Il coefficiente vale ...
$f(0)=P(0)$	$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$	$P(0)=a_0$	$a_0=f(0)$
$f'(0)=P'(0)$	$P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3$	$P'(0)=a_1$	$a_1=f'(0)$
$f''(0)=P''(0)$	$P''(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2$	$P''(0)=2a_2$	$a_2=\frac{f''(0)}{2}$
$f^{iii}(0)=P^{iii}(0)$	$P'''(x)=6a_3+24a_4x$	$P'''(0)=6a_3$ $=3!a_3$	$a_3=\frac{f'''(0)}{3!}$
$f^{iv}(0)=P^{iv}(0)$	$P^{IV}(x)=24a_4=4!a_4$	$P^{iv}(0)=24a_4$ $=4!a_4$	$a_4=\frac{f^{iv}(0)}{4!}$

Il polinomio di Maclaurin è il polinomio che meglio approssima una funzione f(x) nell'intorno di x = 0.

Per "meglio approssima" Maclaurin intende queste semplici condizioni:

1. Il polinomio deve avere lo stesso valore della funzione per x = 0. In simboli matematici: P(0) = f(0).

2. Il polinomio deve avere lo stesso valore della derivata per x = 0: P'(0) = f'(0).
3. Il polinomio deve avere lo stesso valore della derivata seconda per x = 0: P"(0) = f'''(0).
4. ... e così via fino alla derivata n-esima, dove n è il grado del polinomio cercato.

Nella tabella sopra è mostrato come queste condizioni (qui nel caso *n=4*) portino facilmente alla determinazione dei coefficienti. Il procedimento si generalizza facilmente per qualsiasi grado *n*.
In conclusione si ricava la forma generale del polinomio di Maclaurin.

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f^{¿}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{III}(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Per n infinito si ha la serie di Maclaurin.

14.5 Il polinomio di Taylor

Il polinomio di Maclaurin approssima una funzione nei dintorni dell'origine, e la bontà dell'approssimazione degrada rapidamente allontanandosi dal questa.
Per approssimare una funzione nei dintorni di un altro valore $x = x_0$ basta eseguire la traslazione sostituendo a x $(x - x_0)$.

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{¿}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{III}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Si ottiene così il polinomio di Taylor della funzione *f(x)*

Capovolgendo il discorso il polinomio di Maclaurin può vedersi come il caso particolare del polinomio di Taylor quando si prende $x_0 = 0$.

14.6 Polinomio di Maclaurin della gaussiana

Un funzione esponenziale molto importante è quella di Gauss, detta gaussiana già vista al paragrafo 11.14; la sua forma più semplice è:

$$y=e^{-x^2}$$

La funzione è chiaramente pari, la sua derivata, usando la regola della funzione composta è:

$$y=-2xe^{-x^2}$$

che si annulla per *x* = *0* , è negativa per x>0 e positiva per x<0, dunque ha ivi un massimo, il punto (0;1).
La derivata seconda vale, usando la regola di Leibniz:

$$y=-2e^{-x^2}+4\mathrm{x}^2e^{-x^2}=(-2+4\mathrm{x}^2)e^{-x^2}$$

Conoscendo le prime due derivate, e applicando la formula geneale di Maclaurin si ottiene questo polinomio :

$$e^0-2\times 0\times e^0+(-2+4\times 0)e^0\frac{x^2}{2}!=1+x^2$$

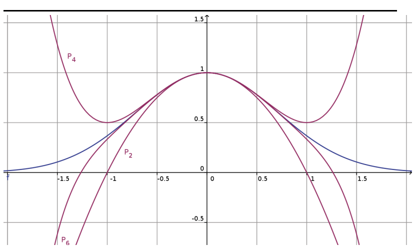
Dunque i primi termini del polinomio sono $1+x^2$
Per questa strada però il calcolo delle derivate successive diventa sempre più laborioso e complicato.

Molto più semplice è sostituire $-x^2$ ad x nel polinomio di e^x visto in precedenza, per esempio per avere i primi 5 termini:

$$e^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5$$

$$e^{-x^2}\approx 1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8-\frac{1}{5!}x^{10}$$

Il grafico a lato mostra come i polinomi approssimino sempre meglio la funzione,ma solo nei dintorni dello zero.



La gaussiana con i primi tre polinomi di Maclaurin

14.7 Un polinomio di Maclaurin a convergenza limitata.

Si può dimostrare che i polinomi visti finora hanno *raggio di convergenza* infinito. Questo vuol dire semplicemente che fissato un raggio (distanza da $x = 0$) grande quanto si vuole e un errore ε piccolo quanto si vuole, si troverà sempre un polinomio di Maclaurin di grado *n* sufficientemente elevato per approssimare la funzione con errore minore di ε per x pari al raggio. In parole povere se si vuole una certa precisione, basta aumentare a sufficienza il grado del polinomio.
Ma non è così per tutte le funzioni.
Consideriamo per esempio la seguente funzione algebrica fratta:

$$y=\frac{1}{1-x}$$

e proviamo a calcolare il suo polinomio di Maclaurin; per questo conviene scrivere la funzione usando gli esponenti negativi, così:

$$y=(1-x)^{-1}$$

Le derivate successive sono allora, applicando la regola di derivazione del prodotto:

$$y'=(-1)(1-x)^{-2}(-1)=(1-x)^{-2}$$
$$y''=(-2)(1-x)^{-3}(-1)=2(1-x)^{-3}$$
$$y''=2(-3)(1-x)^{-4}(-1)=6(1-x)^{-4}$$

ed è facile convincersi che la derivata ennesima è:

$$y''=n!(1-x)^{-n-1}$$

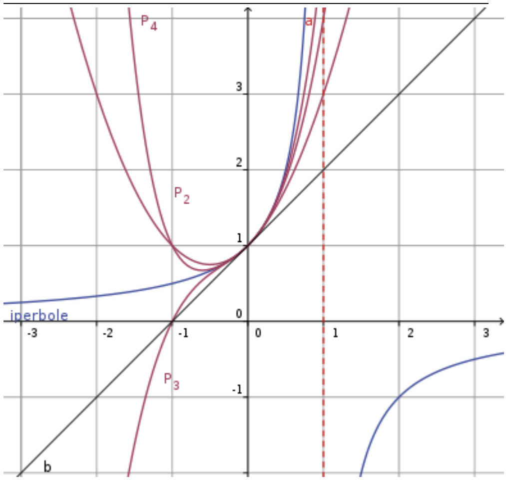
dunque segue che le derivate successive per x = 0 valgono il fattoriale di *n* e il polinomio di Maclaurin è:

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+2\frac{1}{2}x^2+3!\frac{1}{3!}x^3+4!\frac{1}{4!}x^4+5!\frac{1}{5!}x^5$$
$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$$

Per questa funzione il polinomio di Maclaurin è semplicemente la somma delle potenze.
Appare evidente però che per x > 1 la serie tende a infinito mentre la frazione avrà valori ben definiti; per esempio per x = 2 si avrebbe:

$$\frac{1}{1-2}=1+2+4\ldots$$

dove il primo membro vale -1, mentre la serie a destra tende chiaramente a infinito. Qui Maclaurin ci porta ad un'uguaglianza falsa!



I primi polinomi di Maclaurin della funzione in oggetto

Cosa simile avviene anche per i valori negativi; per x = -1 la frazione vale 1/(1-(-2)) = 1/3 mentre il polinomio vale 1 -2 + 4 - 8 che seppure in modo oscillante tende nuovamente a infinito.
In definitiva questo polinomio di Maclaurin è in grado di approssimare la funzione in oggetto solo per $|x|<1$ e la cosa si riassume appunto dicendo che questo polinomio ha raggio di convergenza uguale a 1.
Il grafico a lato mostra come i primi polinomi approssimino bene la funzione nell'intorno di 0, ma si allontanino drammaticamente dall'iperbole al di fuori dell'intervallo di convergenza, quello tra -1 e +1.

Esercizi:

Scrivere il polinomio di Maclaurin della funzione $y=\frac{1}{x+1}$

Scrivere il polinomio di Maclaurin della funzione $y=\sinh(x)$

14.8 Derivazione usando il polinomio di Maclaurin

Il polinomio di Maclaurin può servire anche a derivare una funzione, ammesso ovviamente che si disponga del suo polinomio di Maclaurin. La derivata di un polinomio è in effetti molto semplice.

Esempi:

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\dots$$

1. Derivare *y* = *sin(x);* il polinomio è:

   $$1-\frac{1}{3!}3x^2+\frac{1}{5!}5x^4-\frac{1}{7!}7x^6+\dots$$

   derivando si ottiene:
   che semplificando i fattoriali diventa

   $$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots$$

   che è precisamente il polinomio di Maclaurin del coseno.

   $$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\dots$$

2. Derivare *y* = e^x; il polinomio è:

   $$0+1+\frac{1}{2!}2x+\frac{1}{3!}3x^2+\frac{1}{4!}4x^3+\frac{1}{5!}5x^4+\dots$$

   derivando si ottiene:

che semplificando i fattoriali diventa:
che è nuovamente il polinomio dell'esponenziale

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\dots$$

14.9 Integrazione usando il polinomio di Maclaurin

Più interessante la possibilità di integrare funzioni per serie, visto che esistono molte funzioni che non sono integrabili elementarmente e molte altre che comportano difficoltà considerevoli.

Esempi:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

1. Integrare *y* = *sin(x);* il polinomio è:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \ldots$$

   integrando si ottiene:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3!}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5!}\frac{x^6}{6} - \frac{1}{7!}\frac{x^8}{8} + \ldots$$

   che moltiplicando ai denominatori, ricordando che 4·3! = 4! ecc., diventa …
   nel quale si riconosce il polinomio di Maclaurin del coseno cambiato di segno; manca l'uno iniziale ma trattandosi di un integrale indefinito dove è sempre presente una costante arbitraria di integrazione, la cosa è irrilevante.
   Si conferma che $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

2. Integrare *y* = *e*^{x}*;* il polinomio è:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3!}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4!}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{5!}\frac{x^6}{6} + \ldots$$

   integrando si ottiene:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

   che moltiplicando ai denominatori diventa …
   nel quale polinomio riconosciamo quello di partenza con

la sola mancanza dell'uno iniziale, anche qui irrilevante per lo stesso motivo. Si conferma che è: $\int e^x\,dx = e^x + c$

3. Integrare $y=e^{-x^2}$ (curva di Gauss); qui la cosa è importante perché come si è visto più sopra questa funzione non è integrabile elementarmente. Si è visto sopra che il polinomio di Maclaurin è:
$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{5!}x^{10} + \ldots$$
Integrando termine a termine si ottiene:
$$\int e^{-x^2}dx \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!}\frac{x^9}{9} - \frac{1}{5!}\frac{x^{11}}{11} + \ldots$$
che con qualche semplificazione diventa:
$$\int e^{-x^2}dx \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \frac{x^9}{9\times 4!} - \frac{x^{11}}{11\times 5!} + \ldots$$
Questo polinomio ci fornisce un metodo per approssimare questo integrale che è poi la funzione *erf(x)* vista al paragrafo 12.4

4. Integrare $y=\frac{\sin(x)}{x}$ anche questa come la precedente non è integrabile elementarmente. Il polinomio di Maclaurin si ricava semplicemente dividendo per x
$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots$$
quello del seno,
Integrando termine a termine si ottiene:
$$\int \frac{\sin(x)}{x}dx \approx x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!}\frac{x^7}{7} + \ldots$$
che con qualche semplificazione diventa:
$$Si(x) = \int \frac{\sin(x)}{x}dx \approx x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \ldots$$
che ci permette si approssimare questa funzione, che come è stato ricordato sopra si chiama *seno integrale*.

15 - STUDIO DI FUNZIONE

15.1 Introduzione

Si sono già visti nella prima parte alcuni semplici esempi di studio di funzione limitatamente a funzioni algebriche razionali intere (polinomi).
Riprendiamo ora l'argomento estendendolo a funzioni algebriche fratte e a funzioni non algebriche (goniometriche, esponenziali, logaritmiche).

15.2 Studio di funzioni algebriche fratte

15.2.a Iperbole equilatera

Studiare la funzione

$$y=\frac{2x+3}{x-2}$$

La funzione può anche scriversi in forma esplicita moltiplicando tutto per (x - 2):
y(x - 2) = 2x + 3   => xy - 2x - 3 = 0
La curva è di secondo grado e quindi si tratta di un'iperbole.
Vediamo i singoli passi dello studio:

1. **Insieme di definizione**: è chiaramente R - {2} dovendo essere il denominatore *x - 2 <> 0*.
2. **Ricerca di eventuali** asintoti verticali: per x = 2 c'è un asintoto verticale semplice, infatti sostituendo x con 2 + dx si ha

$$y=\frac{2(2+dx)+3}{2+dx-2}=\frac{4+2\,dx+3}{dx}=\frac{7+2\,dx}{dx}=\frac{7}{dx}+2=7.\omega+2=+\omega$$
$$y=\frac{2(2-dx)+3}{2-dx-2}=\frac{4-2\,dx+3}{-dx}=-\frac{7-2\,dx}{dx}=-\frac{7}{dx}+2=-7.\omega+2=-\omega$$

3. **Ricerca di eventuali asintoti orizzontali**: sostituendo a x 1/dx si ha:
$$y=st\left(\frac{2(\frac{1}{dx})+3}{\frac{1}{dx}-2}\right)=st\left(\frac{\frac{2+3\,dx}{dx}}{\frac{1-2\,dx}{dx}}\right)=st\left(\frac{2+3\,dx}{1-2\,dx}\right)=2$$
dunque c'è un asintoto orizzontale *y* = 2.
4. **Zeri della funzione**, ovvero soluzione dell'equazione f(x) = 0. La frazione è uguale a 0 se e solo se lo è il numeratore, dunque l'equazione si riduce a
$$2\mathrm{x}+3=0\rightarrow 2\mathrm{x}=-3\rightarrow x=-\frac{3}{2}\rightarrow x=-1{,}5$$
Vi è dunque un solo zero per x = -1.5
5. **Studio del segno della funzione**, ovvero soluzione della disequazione f(x) > 0. Qui occorre considerare anche il segno del denominatore.
Risolviamo la disequazione 2x + 3 > 0 in modo del tutto analogo alla soluzione dell'equazione
$$2\,x+3>0\rightarrow 2\,x>-3$$
$$x>\frac{3}{2}=1{,}5$$
Per il denominatore la disequazione è già risolta x > 2.
Riassumendo con il solito schema

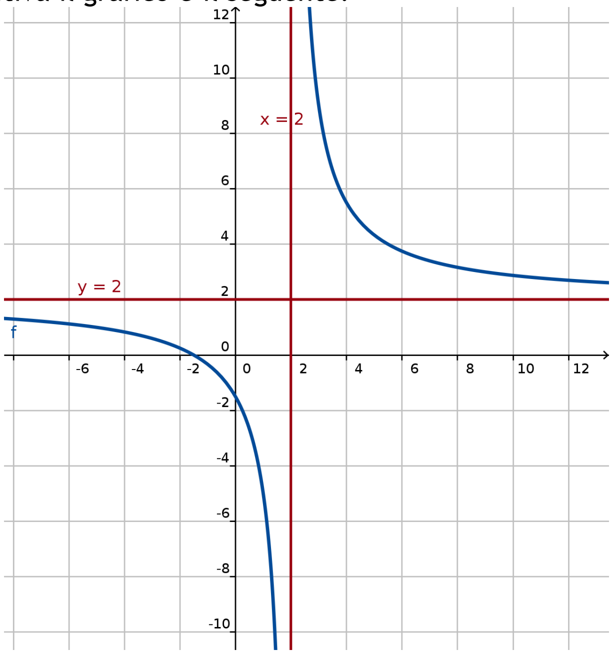
```
                          -1,5          2
   2x + 3 > 0    ----------o++++++++++++++++++++++++++++
   x - 2 > 0     --------------------o++++++++++++++++++
                       +      o    -    o        +
```

La funzione è negativa tra -1,5 e 2, positiva all'esterno di questo intervallo.

6. **Calcolo della derivata e ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi.**
$$y'=\frac{2(x-2)-1.(2\mathrm{x}+3)}{(x-2)^2}=\frac{2\mathrm{x}-4-2\mathrm{x}-3}{(x-2)^2}=\frac{-7}{(x-2)^2}$$ che è sempre negativa e non si annulla mai. Dunque non ci sono né

massimi né minimi, mentre la funzione è sempre decrescente.

In definitiva il grafico è il seguente.



15.2.b Cubica con 2 asintoti verticali

Studiare la funzione

$$y = \frac{x+1}{x^2-4}$$

Si tratta di una curva algebrica di 3° grado (cubica), infatti mettendola in forma implicita si ha

$x^2y - 4y = x + 1$ ovvero $x^2y - x - 4y - 1 = 0$

che è appunto di 3° grado. Vediamo i singoli passi dello studio

Insieme di definizione è R − {−2, +2} dovendo essere il denominatore

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) <> 0$.

Ricerca di eventuali asintoti verticali per x = − 2 e per x = + 2 ci possono essere asintoti verticali; verifichiamolo calcolando il

$$\frac{-2+dx+1}{(-2+dx)^2-4} = \frac{-1+dx}{4-4\,dx+dx^2-4} = \frac{-1+dx}{-4\,dx+dx^2} = \frac{-\omega+1}{-4+dx} \approx +\omega$$

comportamento della funzione per *x* = *-2* + *dx* e *x* = *-2-dx*

$$\frac{-2-dx+1}{(-2-dx)^2-4} = \frac{-1-dx}{4+4\,dx+dx^2-4} = \frac{-1-dx}{+4\,dx+dx^2} \approx -\omega$$

dunque si ha un asintoto verticale semplice *x* = *- 2*; analogamente per *x* = *+ 2*.

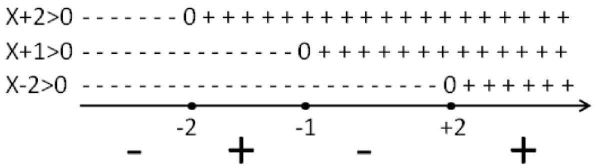
1. Ricerca di eventuali asintoti orizzontali od obliqui. Il polinomio al numeratore ha grado inferiore a quello del denominatore, dunque c'è un asintoto orizzontale *y* = *0* (l'asse delle *x*), come si verifica con il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-4} = st\left(\frac{\frac{1}{dx}+1}{\frac{1}{dx^2}-4}\right) = st\left(\frac{\frac{1+dx}{dx}}{\frac{1-4\,dx^2}{dx^2}}\right) = st\left(\frac{(1+dx)\,dx}{1-4\,dx^2}\right) = st\left(\frac{dx+dx^2}{1-4\,dx^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{\omega+1}{\omega^2-4} = \frac{\omega(1+\epsilon)}{\omega^2(1-4\,\epsilon^2)} = \frac{1+\epsilon}{\omega(1-4\,\epsilon^2)} \approx \frac{1}{\omega} = \epsilon \approx 0$$

2. In definitiva la cubica ha per asintoti l'asse delle x e le due rette x = ±2.

3. **Ricerca degli zeri della funzione**, ovvero soluzione dell'equazione f(x) = 0. La frazione è uguale a 0 se e solo se lo è il numeratore, dunque l'equazione si riduce a
   $x + 1 = 0$ e quindi $x = -1$
   Vi è dunque un solo zero per $x = -1$
4. **Studio del segno della funzione,** ovvero soluzione della disequazione f(x) > 0. Qui occorre considerare anche il segno del denominatore e considerare il segno dei tre fattori (x + 1), (x - 2), (x + 2) e riassumere con il solito schema

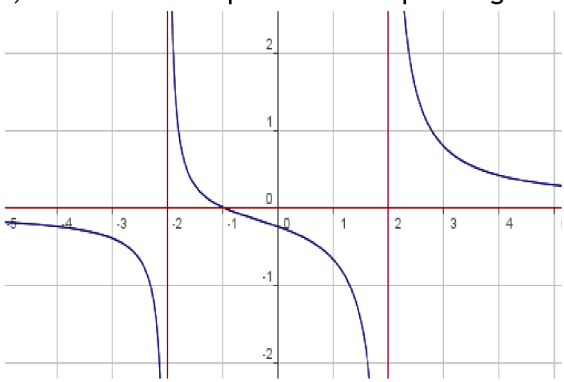


La funzione è positiva per (-2 < x < -1) V (x > +2).

5. **Ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi.** Per derivarla basta applicare la regola della derivata del quoziente

$$y' = \frac{(x^2-4)1-(x+1)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2-2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-2x-4}{(x^2-4)^2}$$

Il numeratore è l'opposto di un falso quadrato dunque è sempre negativo; il denominatore è un quadrato e quindi sempre positivo; la derivata è pertanto sempre negativa, e la funzione è decrescente per ogni valore di x nel dominio.



15.2.c Cubica con asintoto verticale doppio

Studiare la funzione

$$y=\frac{2\mathrm{x}+3}{x^2}$$

Si tratta di una curva algebrica di 3° grado (cubica), infatti mettendola in forma implicita si ha l'equazione:

$$x^2 y=2x+3$$
$$x^2 y-2x-3=0$$

che è appunto di 3° grado.

Vediamo i singoli passi dello studio

1. **Insieme di definizione** è chiaramente R - {0} dovendo essere il denominatore $x\neq 0$.
2. **Ricerca degli zeri della funzione**, ovvero soluzione dell'equazione f(x) = 0. La frazione è uguale a 0 se e solo se lo è il numeratore, dunque l'equazione si riduce a

$$2\mathrm{x}+3=0\, e\, quindi$$
$$2\mathrm{x}=-3\rightarrow x=-\tfrac{3}{2}=-1.5$$

Vi è dunque un solo zero per x = -1.5

3. **Ricerca di eventuali asintoti verticali**: i due limiti valgono:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+3}{x^2}=\frac{2(0-dx)+3}{(0-dx)^2}=\frac{3-2dx}{dx^2}=3\omega^2-2\omega\simeq+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+3}{x^2}=\frac{2(0+dx)+3}{(0+dx)^2}=\frac{3-2dx}{dx^2}=3\omega^2-2\omega\simeq+\infty$$

c'è quindi un asintoto verticale doppio *x=0* coincidente con l'asse delle *y*.

4. **Ricerca di eventuali asintoti orizzontali**. Il polinomio al numeratore ha grado inferiore a quello del denominatore, dunque la frazione è propria e il quoziente della divisione è 0; dunque c'e un asintoto orizzontale y = 0 (l'asse delle x). Si può verificare la cosa anche con il limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\mathrm{x}+3}{x}=st\left(\frac{\frac{2}{\epsilon}+3}{\frac{1}{\epsilon^2}}\right)=st\left(\frac{2+3\epsilon}{\epsilon}\epsilon^2\right)=st\left((2+3\epsilon)\epsilon\right)=0$$

5. **Studio del segno della funzione,** ovvero soluzione della disequazione f(x) > 0. Qui occorre considerare anche il segno del denominatore, che è peraltro sempre positivo salvo che per x= 0 (dove c'è l'asintoto verticale). Risolviamo la disequazione 2x+3>0 in modo del tutto analogo alla soluzione dell'equazione

$$2x+3>0 \; e\, quindi\; 2x>-3 \; x>-\frac{3}{2}=-1{,}5$$

Riassumendo con il solito schema

```
                         -1,5         0
 2x + 3 > 0    -----------o++++++++++++++++++++++++
 x^2 > 0       ++++++++++++++++++++o++++++++++++++++
                    -          +              +
```

La funzione è negativa per x < -1,5 e positiva altrove.

6. **Ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi.** La funzione può scriversi come prodotto usando gli esponenti negativi y=(2x+3)x^(-2). Per derivarla basta allora applicare la regola della derivata del prodotto

$$y'=\frac{2(x^2)-(2x+3)2x}{x^4}=\frac{2x^2-4x^2-6x}{x^4}=\frac{-2x^2-6x}{x^4}=\frac{-2x-6}{x^3}$$

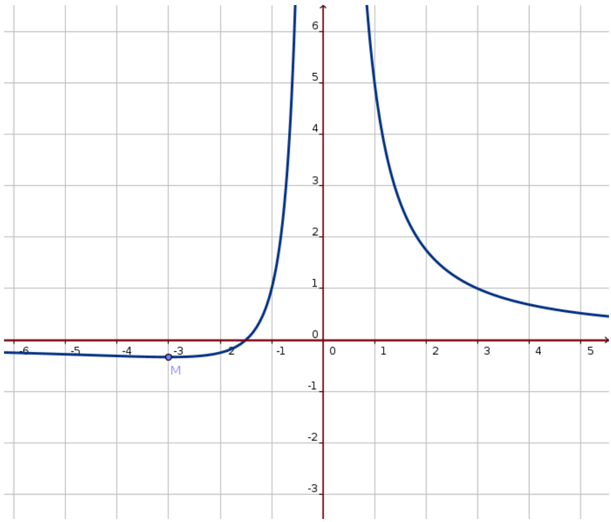
che si annulla quando si annulla il numeratore -2x - 6 = 0 e cioè per x = -3; conviene allora studiare il segno della derivata

```
                          -3       0
 -2x - 6    +++++++++++++++o-----------------------
  x^3       ---------------------o++++++++++++++++
                 - \          + /            -\
```

Dunque per x=-3 c'è un minimo; la y, sostituendo nell'equazione di partenza vale -3/9 = -1/3; in definitiva si ha:

Min (-3; -1/3)

Per x= 0 c'è apparentemente un massimo, ma ricordiamo che x = 0 è l'equazione dell'asintoto verticale; in un certo senso si potrebbe dire che vi è un massimo all'infinito. Riassumendo tutti questi risultati si ottiene il grafico riportato sopra (il minimo è appena percettibile)



15.2.d Cubica con asintoto verticale doppio e obliquo

Studiare la funzione

$$y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

Si tratta di una curva algebrica di 3° grado (cubica), infatti mettendola in forma implicita si ha

$2y(x - 1)^2 = x^3$

che è appunto di 3° grado. Vediamo i singoli passi dello studio

1. **Insieme di definizione:** è R − {1} dovendo essere il denominatore x − 1 ≠ 0 e quindi x ≠ 1.
2. **Ricerca di eventuali asintoti verticali:** per x = 1 ci può essere un asintoto verticale; verifichiamolo calcolando i due limiti:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=st\left(\frac{(1+dx)^3}{2(\cancel{1}+dx-\cancel{1})^2}\right)=st\left(\frac{1+3dx+3dx^2+dx^3}{2dx^2}\right)=\frac{\omega^2}{2}\approx+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=st\left(\frac{(1-dx)^3}{2(\cancel{1}-dx-\cancel{1})^2}\right)=st\left(\frac{1-3dx+3dx^2-dx^3}{2dx^2}\right)=\frac{\omega^2}{2}\approx+\infty$$

dunque vi è un asintoto verticale doppio.

3. **Ricerca di eventuali asintoti obliqui**: il polinomio al numeratore ha grado superiore a quello del denominatore, dunque può esserci un asintoto obliquo, come si verifica con i limiti:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2(x-1)^2}=\ldots$$

$$st\left(\frac{(\frac{1}{dx})^2}{2(\frac{1}{dx}-1)^2}\right)=st\left(\frac{\frac{1}{dx^2}}{\frac{2(1-dx)^2}{dx^2}}\right)=st\left(\frac{1}{2(1-dx)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{1}{2}x=\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+2x^2-x}{2(x-1)^2}=\ldots$$

$$st\left(\frac{2(\frac{1}{dx^2})-\frac{1}{dx}}{2\frac{1-dx}{dx^2}}\right)=st\left(\frac{\frac{2-dx}{\cancel{dx^2}}}{\frac{2-2dx}{\cancel{dx^2}}}\right)=st\left(\frac{2-dx}{2-2dx}\right)=1$$

i due limiti si possono calcolare in modo un po' più veloce con la regola de l'Hopital. La cubica ha comunque un asintoto obliquo y = x/2 + 1.

4. **Ricerca degli zeri della funzione**, ovvero soluzione dell'equazione f(x) = 0. La frazione è uguale a 0 se e solo se lo è il numeratore, dunque l'equazione si riduce a

$$x^3=0\; e\, quindi\; x=0$$

Vi è dunque un solo zero nell'origine.

5. **Studio del segno della funzione,** ovvero soluzione della disequazione f(x) > 0. Qui occorre considerare anche il segno del denominatore e considerare il segno dei tre fattori (x + 1), (x - 2), (x + 2) e riassumere con il solito schema

```
                              0       +1
   x^3 > 0       ----------o+++++++++++++++++++++++
  (x - 1) > 0  +++++++++++++++++o++++++++++++++++
                    -           +              +
```

La funzione è positiva per (x > 0)

6. **Ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi.** Calcoliamo la derivata:

$$y'=\frac{3x^2 2(x-1)^2-x^3 4(x-1)}{4(x-1)^4}=\frac{6x^2(x-1)-4x^3}{4(x-1)^3}=\frac{2x^3-6x^2}{4(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{2(x-1)^3}$$

La derivata si annulla quando si annulla il numeratore $x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3) = 0$. Le soluzioni sono due: x = 0, x = 3. Nello studio del segno va considerato anche il denominatore $(x - 1)^3$:

```
                               0     +1      +3
   x^2 > 0         ++++++++++o+++++++++++++++++++++
  x - 3 > 0        ---------------o+++++++++++++++
  (x - 1)^3 > 0    ---------------------o++++++++
                    + /        + /     - \     +  /
```

Ne segue che:

- Per x = 0 c'è un flesso a tangente orizzontale, crescente.
- Per x = 1 c'è l'asintoto verticale doppio già visto.
- Per x = 3 c'è un minimo: Min(3; 27/8).

Il grafico è quello qui sotto, con gli asintoti evidenziati in rosso.

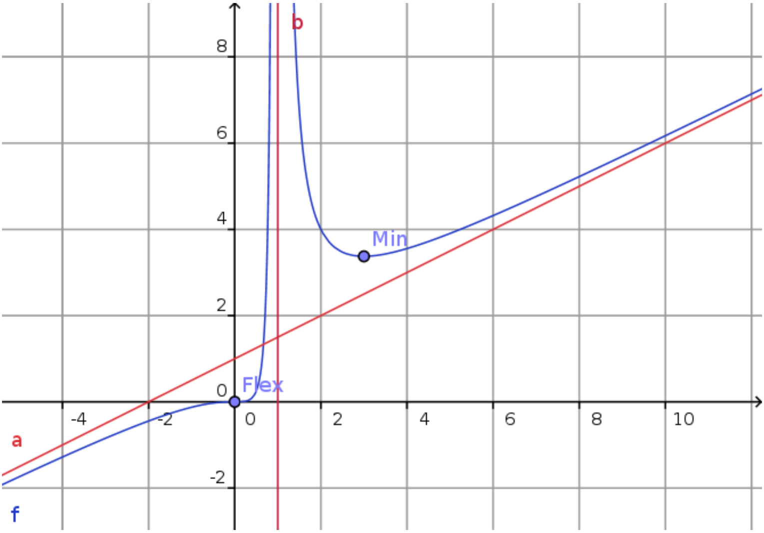


Grafico della cubica

15.3 *Studio di una funzione irrazionale*

Studiamo la funzione

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

che è una funzione algebrica irrazionale.

1. **Insieme di definizione** L'argomento della radice quadrata deve essere positivo o nullo, in altre parole deve essere

   $$4-x^2\geq 0$$

   Fattorizzando si ha (2 − x)(2 + x) ≥ 0 e lo schema è:

```
                −2          +2
  2 − x   ++++++++++++++++++++++o−−−−−−−−−−−−−−
  2 + x   −−−−−−−−−−−o++++++++++++++++++++++++++
               −           +            −
```

   Dunque la funzione è definita per −2 ≤ x ≤ +2. Il dominio è l'intervallo [−2, +2]

2. **Ricerca di eventuali asintoti verticali** per x = ±2 la funzione vale zero e quindi non ci sono asintoti verticali.

3. **Ricerca di eventuali asintoti obliqui**: non possono esserci asintoti orizzontali od obliqui, perché non ha senso calcolare i limiti all'infinito per una funzione limitata all'intervallo finito [−2, +2]
4. **Zeri della funzione**: si tratta di risolvere l'equazione 4 − x2 = 0 già risolta per l'insieme di definizione. Gli zeri sono x = −2 e x = +2
5. **Studio del segno della funzione**: il radicale è sempre positivo salvo per x = ± 2 dove si annulla.
6. **Ricerca di massimi, minimi e flessi**: calcoliamo la derivata della funzione secondo la regola della funzione composta:

$$y=\sqrt{t}$$
$$t=4-x^2$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$\frac{dt}{dx}=-2x$$

La derivata è quindi:

$$y'=-2x\frac{1}{2\sqrt{(x^2-4)}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

La derivata, essendo il denominatore sempre positivo, ha il segno di −*x*, negativa nel I quadrante, positiva nel II quadrante. La funzione è quindi decrescente nel I quadrante, crescente nel II. La derivata si annulla per *x* = *0* e quindi riassumendo:

```
                            0
   - x   +++++++++++++o---------------
                  +              -
                  /               \
```

Per x = 0 c'è dunque un massimo Max(0;2). Infine si noti che per *x* = ±2 la derivata vale 2/0, in altre parole tende a infinito per x →±2. Geometricamente questo significa che per *x* = ± *2* la funzione ha tangente verticale.

In definitiva si ottiene il grafico riportato accanto.

1. **Osservazione N.1** Elevando al quadrato la funzione si ottiene:
   $y^2 = 4 - x^2$
   o anche
   $x^2 + y^2 = 4$
   che altro non è che l'equazione di una circonferenza di raggio *r* = 2. La funzione studiata non è altro che la semicirconferenza al di sopra dell'asse delle *x*.

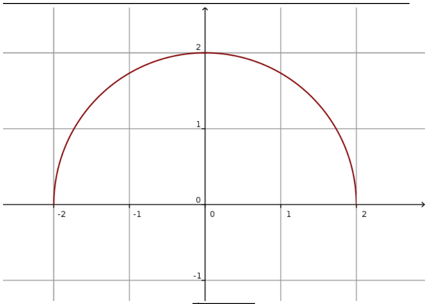


Grafico di $y=\sqrt{4-x^2}$

2. **Osservazione N.2** Sostituendo nella funzione x con 2.cos(t) si ha:
   $y=\sqrt{4-4.\cos^2(t)}=2\sqrt{1-\cos^2(t)}$
   e per l'identità goniometrica fondamentale:
   $y=2\sqrt{\sin^2 t}=2\sin(t)$
   Se ne ricavano le cosiddette equazioni parametriche della circonferenza, analoghe a quelle dell'iperbole equilatera.
   x = 2.cos(t)
   y = 2.sin(t)

15.4 *Studio di funzioni goniometriche*

Studiamo la funzione:

$y=\sin(x)+\sin(2x)$

Vediamo i singoli passi dello studio

1. **Insieme di definizione:** il seno è definito per ogni valore di x, dunque I = R.
2. **Periodo della funzione:** la funzione seno ha periodo 2π, la seconda armonica sin(2x) ha periodo π. Il minimo comune multiplo è 2π e questo è il periodo della funzione. Basterà quindi studiare la funzione in un intervallo di ampiezza 2π, p.es.]-π,+π].

3. **Simmetrie**: cambiando x in -x la funzione cambia di segno, si tratta quindi di una funzione dispari, con simmetria centrale rispetto all'origine.
4. **Ricerca di eventuali asintoti**: il seno è una funzione limitata tra -1 e +1, anche la somma di due funzioni sinusoidali sarà limitata; dunque non esistono asintoti.
5. **Ricerca degli zeri della funzione**, ovvero soluzione dell'equazione sin(x) + sin(2x) = 0. Ricordando la formula di duplicazione del seno si ha
   $$\sin(x)+2\sin(x)\cos(x)=0$$
   $$\sin(x)(1+2\cos(x))=0$$
   e quindi, per la legge di annullamento del prodott, l'equazione si spezza in due casi:
   $$\sin(x)=0 \rightarrow x=0+2k\pi$$
   $$1+2\cos(x)=0 \rightarrow \cos(x)=-\frac{1}{2} \rightarrow x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$$
   Limitando lo studio all'intervallo]-π, + π] si hanno i seguenti zeri:

x = -2π/3	x = -2.094
x = 0	x = 0
x = +2π/3	x = +2.094
x = π	x = +3.142

6. **Calcolo delle derivate**. La derivata di *sin(x)* è *cos(x)*. La funzione *sin(2x)* è una funzione composta, e la sua derivata vale il prodotto delle due derivate: 2.*cos(2x)*. La derivata della funzione in studio è allora
   $$f'(x)=\cos(x)+2\cos(2\mathrm{x})$$
   Procedendo in modo analogo e ricordando la regola della derivata del coseno si calcola anche la derivata seconda:
   $$f''(x)=-\sin(x)-4\sin(2\mathrm{x})$$

7. **Ricerca dei massimi, dei minimi e dei flessi.** Conviene usare il II metodo. L'equazione f'(x) = 0 diventa
   $$\cos(x)+2\cos(2\mathrm{x})=0$$

Conviene anche qui ricordare la formula di duplicazione del coseno che è cos(2x) = $\cos^2(x)$ - $\sin^2(x)$ o in funzione del solo coseno cos(2x) = 2.$\cos^2(x)$ - 1 e quindi l'equazione diventa:

$$\cos(x)+2(2\cos^2(x)-1)=0 \rightarrow \cos(x)+4\cos^2(x)-2=0$$

e riordinando i termini:

$$4\cos^2(x)+\cos(x)-2=0$$

si tratta quindi di un'equazione di secondo grado nel coseno; risolvendo rispetto a cos(x) si ha:

$$\cos(x)=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$$

$$\cos(x_1)=-0.84307...$$

$$\cos(x_2)=+0.59307...$$

Si tratta ora di risolvere le due equazioni goniometriche elementari (in radianti) con l'ausilio della calcolatrice tascabile:

$$\cos(x_1)=-0.84307... \rightarrow x=\arccos(-0.84307)=\pm 2.57376...$$

$$\cos(x_2)=0,59307... \rightarrow x=\arccos(0,59307)=\pm 0.9359...$$

I punti stazionari della curva sono quindi quattro

```
x = -2,57376...    x = -0,9359...
x = +0,9359...     x = +2,57376...
```

$$f''(-2,57376)=-\sin(-2,57376)-4\sin(-2.2,57376)=-3.08<0 \rightarrow \text{massimo}$$

$$f''(-0,9359)=-\sin(-0,9359)-4\sin(-2.0,9359)=4.63>0 \rightarrow \text{minimo}$$

$$f''(+0,9359)=-f''(-0,9359)=-4.63<0 \rightarrow \text{massimo}$$

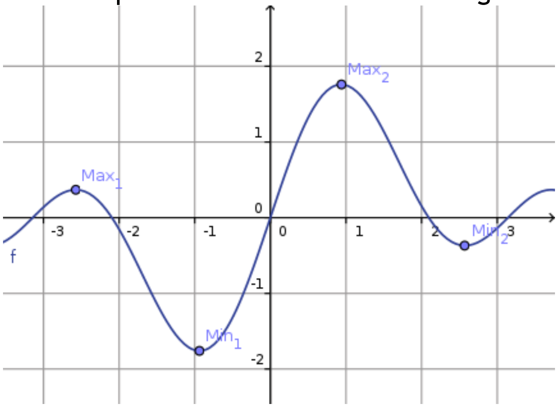
$$f''(+2,57376)=-f''(-2,57376)=+3.08>0 \rightarrow \text{minimo}$$

Per decidere se si tratta di massimi, minimi o flessi va calcolata la derivata seconda per ognuno:

Le ordinate dei quattro punti si ottengono calcolando la funzione di partenza sin(x)+sin(2x) per ognuno dei quattro punti e in definitiva si trova (i valori di x e y sono approssimati alla 4a cifra decimale):

$$Max_1(-2{,}5738\,,+0{,}3690)$$
$$Min_1(-0{,}9359\,,-1{,}7602)$$
$$Max_2(+0{,}9359\,,+1{,}7602)$$
$$Min_2(+2{,}5738\,,-0{,}3690)$$

Riassumendo tutti questi risultati si ottiene il seguente grafico.



16 - APPENDICE 1 CONFRONTO TRA NSA E ANALISI CLASSICA

In che senso l'approccio NSA è più semplice di quello standard? In questa appendice vediamo un paio di esempi tra i tanti che si potrebbero fare.

16.1 Definizione di continuità

Che cosa rende più o meno difficile la comprensione di una proposizione matematica?
Molto dipende dai quantificatori presenti. Vediamo un primo esempio tra i numeri interi:
$\forall x \forall y : x+y=4$
(in italiano: dati due qualsiasi numeri x e y la loro somma è 4)
Non ci vuole molto a capire la proposizione e a capire che è falsa.
Se invece usiamo i quantificatori esistenziali:
$\exists x \exists y : x+y=4$
(in italiano: esistono due numeri x e y la cui somma è 4)
E anche qui non ci vuole molto a capire che la proposizione è vera.
Vediamo invece questa proposizione:
$\forall x \exists y : x+y=4$
(in italiano: per ogni x esiste un y che sommato a x dà 4.)
la comprensione qui non è così immediata ed equivale a risolvere un'equazione. Solo allora si può concludere che è vera, infatti c'è sempre un $y = 4 - x$. Scambiando i due quantificatori
$\exists y \forall x : x+y=4$
(in italiano: esiste un y che sommato a un qualsiasi x dà sempre 4)
Ci vuole un attimo di riflessione per capire che si tratta di una proposizione falsa. Infatti l'enunciato è vero solo per $x = 4 - y$.

Sulla base di questi esempi i logici hanno definito[29] una misura della complessità di una proposizione come il numero di variazioni di quantificatore. Nelle prime due proposizioni qui sopra tale misura vale 0, non ci sono variazioni; nelle ultime due invece la misura vale 1. In base a questa regola le ultime sono più complesse delle prime, in accordo con quanto osservato qui sopra.

Vediamo ora la definizione di continuità stile NSA per una funzione f(x) per $x=x_0$:

$$\forall x : x \simeq x_0 \rightarrow f(x) \simeq f(x_0)$$

Usando l'analisi classica la definizione stile "epsilon-delta" la definizione assume questa forma:

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x : |x-x_0| < \delta \rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$$

La differenza di complessità è evidente in buon accordo con il criterio dei quantificatori che dà un rapporto di 0 : 2.
Lo stesso divario vale per le definizioni di limite, dato che la teoria dei limiti è strettamente legata a quella della continuità.

16.2 Derivata della funzione composta

La regola della derivata di una funzione composta $y=f(g(x))$ e cioè di una funzione scomponibile in due funzioni:

$$y=f(t)$$
$$t=g(x)$$

è facilmente giustificabile come una semplice semplificazione in croce:

$$st(\frac{dy}{dx}) = st\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right) = st\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot st\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

Nell'analisi classica si deve invece ricorrere a una dimostrazione piuttosto contorta che fa naturalmente uso dei limiti. Per esempio sull'ottima *Analisi Matematica* di Luigi Amerio (UTET

29 Vedi J.M HENLE-E.M.KLEINBERG, *Infinitesimal Calculus* - Dover Publications, pag. 117.18

1990) la dimostrazione richiede due pagine la 184 e 185 con quattro passaggi al limite. Nelle *Lezioni di analisi matematica* di Piero Buzano (Levrotto e Bella 1968) occupa circa una pagina (89-90); di seguito riportiamo il nocciolo della dimostrazione adattata alla nostra notazione:

Sia ***y*** = ***f(x)*** una funzione composta mediante le funzioni:

$y=f(t) e\, t=g(x)$

che supporremo entrambe derivabili. Si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h}$$

e quindi applicando la seconda formula dell'incremento finito, si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f[g(x)+hg'(x)+h\omega_2]-f(g(x))}{h}$$

e ponendo $h f'(x)+h\omega_2=k$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f[t+k]-f(t)}{h}$$

applichiamo ora a $f(t+k)$ la prima formula dell'incremento finito ove si sostituisca *x* con *t* e *h* con *k*, avremo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=[f(t)+\omega_1]\frac{k}{h}$$

e ripristinando per *k* l'espressione $h f'(x)+h\omega_2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(t)g'(x)+g'(x)\omega_1+f'(t)\omega_2+\omega_1\omega_2$$

che per $h\to 0$ dà:

$$\frac{dy}{dx}=f'(t)g'(x)$$

Alla fine Buzano osserva che:

> Usando la notazione di Leibniz coi differenziali questa regola assume la forma particolarmente suggestiva
> $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

Non è necessario alcun commento sulla differenza di complessità tra le due dimostrazioni.

Un discorso molto simile vale anche per altre regole e teoremi dell'analisi, dalla regola della funzione inversa al teorema fondamentale dell'analisi.

17 - Appendice 2 SIA (Smooth Infinitesimal Analysis)

Una volta rotto il ghiaccio che circondava gli infinitesimi, i tentativi di rifondare l'Analisi sugli infinitesimi si sono moltiplicati. Negli anni '70 il matematico inglese John Conway inventò i numeri *surreali* che possono considerarsi un'estensione degli iperreali.
Sempre negli anni '70 si sviluppò un'altra teoria basata sugli infinitesimi: la Smooth Infinitesimal Analysis (SIA); l'approccio è in questo caso di origine geometrica.
L'idea di fondo della SIA sembra essere quella di portare alle estreme conseguenze il concetto di continuità: il Bell in [2] sostiene che se le linee sono entità continue allora sembra poco coerente vederle come costituite da *punti indivisibili*, più logico vederle formate da *lineette rettilinee infinitesime* che sono infinitamente suddivisibili e si sovrappongono tra di loro.

17.1 Fondamenti della SIA

Ciononostante il concetto di punto è ancora presente nei due principi che il Bell riporta come fondamenti della SIA:

Principio di microlinearità *(Principle of Microstraightness): Per ogni curva C e ogni punto P appartenente ad essa, esiste un segmento di C non degenere - un microsegmento - intorno a P che è rettilineo, in altri termini C è microrettilinea intorno a P.*

Conseguenza di questo principio è il secondo principio:

Esistenza di numeri non nulli a quadrato nullo: *L'insieme delle grandezze dx diverse da zero, per le quali è* $dx^2 = 0$*, non è vuoto.*

Prevedibilmente anche questi numeri si chiamano infinitesimi.

Che il secondo principio sia conseguenza del primo è abbastanza evidente: infatti dire che una curva a livello microscopico è rettilinea equivale a dire che a livello microscopico si devono considerare solo termini lineari e considerare nulli tutti i termini di ordine superiore a partire dal secondo.
In effetti si tratta anche qui di un ritorno a Leibniz, che nelle sue prime opere e nelle lettere a Newton usava appunto considerare nulli gli infinitesimi del secondo ordine.
Questa singolare proprietà degli infinitesimi della SIA ha l'interessante conseguenza di semplificare moltissimo l'Analisi riducendola a semplice algebra, ma comporta anche problemi di carattere logico: viene infatti meno la legge del terzo escluso. In particolare non è più vero che se due numeri non sono uguali allora sono diversi (non uguali), ma sono possibili tre casi:

a. I due numeri sono esattamente uguali.
b. I due numeri differiscono per un infinitesimo e sono quindi *indistinguibili*.
c. I due numeri differiscono per un numero finito e sono quindi diversi.

Se ora confrontiamo un infinitesimo con lo zero dobbiamo convenire che gli infinitesimi sono indistinguibili da zero (oltre che tra di loro).
La logica della SIA sembra quindi essere quella intuizionista di Brouwer che negava appunto la validità della legge del terzo escluso.
Un altro problema è che porre $dx^2 = 0$ costringe a ridefinire in altro modo quelle forme quadratiche tanto usate nella geometria differenziale e nel calcolo tensoriale, come p.es.
$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
Per la SIA un forma del genere svanisce nel nulla!! Ed è paradossale che ciò avvenga proprio là dove gli infinitesimi erano ancora di fatto usati.
Naturalmente anche nella SIA si possono definire numeri infiniti come reciproci degli infinitesimi.

17.2 La derivata nella SIA

Nella SIA la derivata viene definita in forma implicita:

$$f(x+dx)=f(x)+f\,'(x).\,dx$$

In questo modo si evita la definizione esplicita che comporta la divisione per un infinitesimo, numero che abbiamo visto essere *indistinguibile* da zero.

Con questa formula diventa molto facile ricavare le derivate elementari; per esempio prendendo ***f(x)*** = ***x***^{2}:

$$(x+dx)^2=x^2+f\,'(x)\,dx$$
$$x^2+2\,x\,dx+dx^2=x^2+f\,'(x)\,dx$$
$$2\,x\,dx=f\,'(x)\,dx$$
$$2\,x=f\,'(x)$$

In modo del tutto analogo si dimostra che la derivata di x^3 è $3x^2$, e in generale:

$$D\,x^n=n\,x^{n-1}$$

Come secondo esempio proviamo ora a calcolare la derivata del seno.

$$\sin(x+dx)=\sin x+f\,'(x)\,dx$$
$$\sin x\cos dx+\sin dx\cos dx=\sin x+f\,'(x)\,dx$$
$$\sin x+dx\cos dx=\sin x+f\,'(x)\,dx$$
$$dx\cos dx=f\,'(x)\,dx$$
$$\cos x=f\,'(x)$$

E per ultimo esempio la derivata della funzione esponenziale:

$$e^{(x+dx)}=e^x+f\,'(x)\,dx$$
$$e^x\,e^{dx}=e^x+f\,'(x)\,dx$$
$$e^x\,e^{dx}-e^x=f\,'(x)\,dx$$
$$e^x(e^{dx}-1)=f\,'(x)\,dx$$

e ricordando che $e^{dx}=1+dx$

$$e^x\,dx=f\,'(x)\,dx$$
$$e^x=f\,'(x)$$

18 - Appendice 3: Applicazioni in Fisica

Le applicazioni dell'Analisi alla Fisica sono innumerevoli, del resto l'Analisi è nata anche e soprattutto come strumento per fisici e ingegneri. Questo legame resta in genere fuori dei libri di liceo; in questa breve appendice mi limito a riportare due esempi per mostrare come la conoscenza degli strumenti del calcolo infinitesimale sia utile per ricavare alcuni risultati del programma liceale di Fisica altrimenti piuttosto difficili da comprendere.

18.1 La caduta dei gravi

Galileo sperimentando la caduta dei gravi su un piano inclinato trovò che lo spazio percorso da un corpo in caduta sul piano inclinato è proporzionale al quadrato del tempo impiegato; matematicamente questa legge si esprime come $s=kt^2$
dove k è una costante di proporzionalità che dipende dalle unità di misura usate, ma, cosa importante, non dipende dalla massa del corpo; in altre parole un pallino di piombo e un pallino di legno di balsa cadono esattamente negli stessi tempi. Le differenze che si riscontrano nel mondo reale sono dovute alle forze di attrito che rallentano i corpi in caduta in misura che dipende dalla forma dell'oggetto; una piuma cade più lentamente di un pallino di piombo non perché sia più leggera ma perché la sua forma oppone maggiore resistenza all'aria.
Quella di Galileo è una legge empirica basata direttamente su una esperienza reale; manca in questa legge un modello teorico più ampio, quello che fu in seguito formulato da Newton con le leggi d'inerzia e della gravitazione.
Galileo non aveva il calcolo infinitesimale; basta il concetto di derivata per ricavare da questa semplice legge conseguenze molto importanti.
Innanzitutto possiamo ricavare la velocità istantanea, ricordando che questa è la derivata dello spazio rispetto al tempo,

$$s = k\,t^2$$
$$\frac{ds}{dt} = k\,2\,t = 2\,kt$$
$$v = 2\,kt$$

Quindi la velocità istantanea cresce proporzionalmente al tempo. Che la velocità di un corpo in caduta libera aumenti è fatto facilmente verificabile, il calcolo della derivata ci consente di dire qualcosa in più e cioè che l'aumento è proporzionale al tempo.
Se ora calcoliamo la derivata della velocità, ovvero la derivata seconda si ha:

$$v = 2\,kt$$
$$\frac{dv}{dt} = 2\,k$$
$$a = 2\,k$$

L'accelerazione del moto di caduta dei gravi è dunque costante; si tratta in altre parole di un moto uniformemente accelerato (M.U.A.).
Capovolgendo il discorso e partendo dal II principio della dinamica (un corpo soggetto a una forza costante subisce un'accelerazione costante e proporzionale alla forza e dunque si muove di M.U.A.) possiamo ricavare facilmente la legge del moto rettilineo uniformemente accelerato per mezzo di due integrazioni.
Chiamiamo ***a*** l'accelerazione costante; ma l'accelerazione è, sempre per definizione, la derivata della velocità: $\frac{dv}{dt} = a$
per ricavare la velocità istantanea si deve allora passare agli integrali: $v = \int a\,dt = a\,t + c$
La costante di integrazione ***c*** ha qui un significato preciso: è il valore della velocità per t = 0, in altre parole la velocità iniziale; al simbolo c si preferisce allora il più espressivo v_0. La legge della velocità in questo moto è quindi: $v = a\,t + v_0$

Ma la velocità è la derivata della posizione ***s*** rispetto al tempo, dunque è

$$\frac{ds}{dt}=a\,t+v_0$$

Passando agli integrali si ricava la legge del moto:

$$s=\int a\,t+v_0\,dt$$

$$s=\frac{1}{2}a\,t^2+v_0\,t+c$$

Anche in questo caso la costante di integrazione ha un significato preciso: è il valore della posizione s quanto t è 0, in altre parole la posizione iniziale del corpo s_0. Si scrive allora:

$$s=\frac{1}{2}a\,t^2+v_0\,t+s_0$$

che è la classica equazione del moto uniformemente accelerato. Confrontando questa legge con quella ricavata da Galileo, appare evidente che la costante di proporzionalità ***k*** altro non è che la metà dell'accelerazione di gravità.

18.2 Il moto circolare uniforme

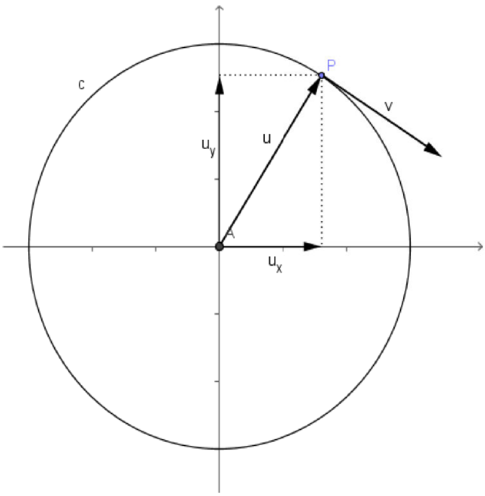
Il moto circolare uniforme è un moto nel quale un corpo percorre una traiettoria circolare, con velocità scalare costante. L'aggettivo *scalare* è importante qui; come vettore la velocità non è costante in quanto cambia continuamente direzione.
Un semplice esempio di moto circolare uniforme è quello della lancetta dei minuti dell'orologio: la sua punta percorre una circonferenza ogni ora (3600 secondi); la sua frequenza è allora 1/3600, la sua velocità angolare 2π/3600 (un angolo giro ogni ora).

$$\omega=\frac{2\pi}{3600}\approx 0{,}01745\,rad/sec$$

In termini matematici un moto di questo tipo si descrive con le equazioni delle due coordinate:

$$x=R\cos(\omega\,t)$$

$$y=R\sin(\omega\,t)$$



Moto circolare uniforme

dove R è il raggio della circonferenza, ω è la velocità angolare espressa in radianti al secondo. Il prodotto ωt è quindi l'angolo des-critto dal punto nel suo moto. In sostanza queste equazioni ci per-mettono di calcolare ad ogni istante t, le coordi-nate della posizione x e y; il vettore di componenti x e y è il vettore posizione e corrisponde a un raggio della circonferenza. Nell'e-sempio dell'orologio è la lancetta, ill calcolo infinitesimale permette di calcolare subito velocità ed accelerazione; per prima cosa calcoliamo le derivate di x e y rispetto al tempo t: $x' = -R\omega\sin(\omega t)$

$y' = R\omega\cos(\omega t)$

Queste sono le componenti del vettore velocità. E' facile convincersi che tale vettore è perpendicolare al vettore posizione che è poi il raggio della circonferenza. Dunque la velocità è tangente alla circonferenza.

Per calcolare l'accelerazione non resta che ripetere lo stesso procedimento, calcolando la derivata della velocità.

$$x'' = -R\omega^2\cos(\omega t)$$
$$y'' = -R\omega^2\sin(\omega t)$$

Confrontando questo risultato con le equazioni del moto notiamo subito che il vettore accelerazione ha componenti opposte a quelle del vettore posizione e in modulo uguali al vettore posizione moltiplicato per ω^2. In formule si può scrivere: $a = -\omega^2 R$

che è la classica formula dell'accelerazione nel moto circolare uniforme.

19 - BIBLIOGRAFIA

19.1 Libri

A.Robinson, *Non Standard Analysis* - Princeton 1966
J.M Henle-E.M.Kleinberg, *Infinitesimal Calculus* - Dover Publications 2003
J.L. Bell, *A primer of Infinitesimal Analysis* - Cambridge University Press 1998
a cura di G.Cantelli, *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Universale Bollati Boringhieri, Torino 1958-2006.
R.Courant- H.Robbins, *Che cos'è la Matematica* (a)Cap.9.12 Analisi non standard (pag. 620) - Bollati-Borighieri Torino 2000
P.Odifreddi, *La Matematica del Novecento* Teoria dei modelli: i numeri iperreali di Robinson.(pag.59), (a)Cap. 2.9 Einaudi 2000.
V. Manca, *Logica matematica* - (a)Cap. 2.5 Completezza e compattezza (pag. 91) Bollati Boringhieri 2001
Luigi Amerio, *Analisi Matematica,* Torino UTET 1990.
Piero Buzano, *Lezioni di Analisi Matematica*, Torino 1968.
C. B. Boyer, *Storia della Matematica* - Oscar Mondadori Milano 1968

19.2 Web

H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus* Prindle, Weber &Schmidt Inc., Boston 1976 scaricabile da Università del Wisconsin http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html (u.c. 23.06.2011)
Keith D.Stroyan1997 *Mathematical Background: Foundations of Infitesimal Calculus* scaricabile da Università dello Iowa http://www.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/InfsmlCalc.htm (u.c. 23.06.2011)