

Matematicamente.it

Carlo Sintini

FISICA? NO PROBLEM !

volume secondo

Moto armonico - Ottica - Acustica

Termologia - Elettromagnetismo



Carlo Sintini

Fisica ? ... No problem !!!
Volume 2

*Moto armonico – Ottica – Acustica
Termologia- Elettromagnetismo*



Carlo Sintini

Fisica ? ... No problem !!! Volume 2

© Carlo Sintini / Matematicamente.it – novembre 2011
www.matematicamente.it – libri@matematicamente.it

La versione digitale è disponibile gratuitamente al sito
www.matematicamente.it

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

ISBN 978 88 96354 18 6

A mio nipote Samuele

PREFAZIONE

Questo volume è un manuale che raccoglie i contenuti di tutte le mie lezioni tenute nei licei scientifici in cui ho insegnato (il “Majorana” ed il “Grassi” di Latina). I miei ex alunni, se avranno l’opportunità di leggerlo, ritroveranno gli argomenti che spiegavo loro, quasi nella stessa forma con cui li proponevo ad essi.

Non è quindi un testo vero e proprio, redatto con uno sviluppo sistematico, ma un insieme di argomenti presi dai miei appunti e messi in una forma definitiva ed organica.

I vari concetti sono affrontati nel modo più immediato e conciso che mi è stato possibile, e spero che possano risultare utili a tutti gli studenti di liceo come manuale di appoggio al loro libro di testo (e non come un testo vero e proprio).

Mi sembrava un peccato, una volta andato in pensione, distruggere tutti gli appunti che avevo elaborato con tanta pazienza, e spero che possano tornare ad essere utili ai nuovi studenti che non conosco, ma ai quali auguro buon lavoro.

Carlo Sintini

INDICE

PREFAZIONE	6
IL MOTO ARMONICO	14
Approccio Cinematico.....	14
La velocità.....	15
L'accelerazione	16
Precisazione trigonometrica	17
Approccio meccanico	18
Il pendolo.....	19
Una equazione dimensionale.....	21
L'energia nel moto armonico.....	22
Funzione lineare in seno e coseno.....	23
OTTICA.....	26
La luce: onde o corpuscoli?.....	26
Le leggi di Snellius-Cartesio	27
Gli specchi piani.....	27
Destra o sinistra?	28
Gli specchi parabolici.....	28
Gli specchi sferici.....	31
Le approssimazioni di Gauss.....	32
Costruzione grafica delle immagini.....	33
1° Caso – specchi concavi (immagine reale).....	33
2° Caso – specchi concavi (immagine virtuale)	33
3° Caso – specchi convessi.....	34
La formula dei punti coniugati	34
Leggi di Snellius–Cartesio per la rifrazione.....	35
Perché un raggio luminoso si spezza?	36

Incongruenza dell'ottica geometrica	37
Il diottro sferico	38
Le lenti sottili.....	40
Classificazioni delle lenti	41
Determinazione grafica delle immagini	42
Ancora sui punti coniugati per le lenti	43
L'angolo limite.....	44
Conseguenze della riflessione totale	44
I fenomeni ondulatori	45
Equazioni delle onde	46
Le onde elettromagnetiche	48
La dispersione della luce	49
Il principio di Huyghens.....	50
L'esperienza di Young	50
2 ^a legge della rifrazione con la teoria ondulatoria	52
ACUSTICA.....	54
Il suono.....	54
L'effetto Doppler.....	55
I battimenti	56
La risonanza	58
La velocità della luce.....	59
Lo sviluppo in serie di Fourier	60
L'onda quadra.....	61
L'onda a dente di sega.....	61
L'onda triangolare	62
Alcune considerazioni grafiche	62
TERMOLOGIA	64
Gli stati di aggregazione della materia	64
Calore e temperatura	64

Scale termometriche	65
La quantità di calore	66
Calore specifico e capacità termica	67
Termometri a gas	67
Dilatazione dei solidi	69
Leggi dei gas e trasformazioni tipiche	70
Equazione caratteristica dei gas	71
Teoria cinetico-molecolare dei gas perfetti	72
Propagazione del calore	75
L'equivalente meccanico della caloria	76
LA TERMODINAMICA	78
Primo principio della termodinamica	79
Energia interna	80
Il ciclo di Carnot	80
ELETTROMAGNETISMO	84
Il campo gravitazionale	84
Il principio di sovrapposizione	85
Il teorema della circuitazione	85
Differenza di energia potenziale	87
Energia potenziale in un punto	88
Potenziale in un punto	89
Superfici equipotenziali	89
Intensità del campo elettrico	90
Corrispondenze tra campo gravitazionale e campo elettrico	91
Il radiante e lo steradiante	92
Il flusso	93
Teorema di Gauss	93
Prima fase	93
Seconda fase	94

Terza fase.....	95
Campo elettrico all'interno di un conduttore (pieno o cavo)	95
Teorema di Coulomb.....	97
Campo elettrico fra due lamine metalliche aventi cariche opposte	98
Esperienza di Millikan.....	98
Capacità di un conduttore.....	100
Il condensatore	101
Capacità di un condensatore piano	102
Capacità in serie e in parallelo.....	103
La corrente elettrica.....	104
Elettroni liberi di conduzione	105
La resistenza elettrica e le leggi di Ohm	106
I principi di Kirchhoff	107
Resistenze in serie e in parallelo	108
Effetto Joule	109
Conduzione nei liquidi	110
Le leggi dell'elettrolisi.....	112
Le esperienze di Volta.....	112
La pila di Volta.....	113
Conduzione nei gas	115
Analogia idraulica	116
Il circuito RC.....	116
Il magnetismo naturale	120
Interazione corrente-magnete	121
Il campo magnetico	123
Interazione corrente-corrente.....	124
Leggi di Biot-Savart.....	125
Teorema di equivalenza di Ampère.....	125
Circuitazione del campo magnetico	126

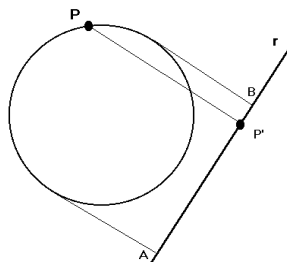
Il teorema di Gauss per il campo magnetico	127
La permeabilità magnetica relativa	128
Perché le calamite attraggono alcuni metalli	128
Orbite circolari	130
Correnti indotte.....	132
Momento torcente di una spira in un campo magnetico.....	134
Il motore elettrico	135
L'alternatore	136
Generatore di corrente pulsante.....	136
Legge di Farady–Newmann	137
Correnti alternate.....	138
I valori efficaci	138
L'autoinduzione.....	139
Circuito RL in chiusura	140
Circuito RL in apertura.....	142
L'impedenza	143
Circuito risonante LC	144
La potenza di una corrente alternata.....	145
I trasformatori.....	146
Il trasporto dell'energia elettrica	148
Le equazioni di Maxwell.....	148
BIBLIOGRAFIA	150

IL MOTO ARMONICO

Il moto armonico può essere considerato come la proiezione di un moto circolare uniforme su una retta r .

Mentre il punto P si muove con moto circolare uniforme, il punto P' si muove con moto armonico lungo il segmento AB .

Intuitivamente si capisce che la sua velocità non è costante: essa ha valore massimo nella regione centrale del segmento AB , e decresce fino ad annullarsi man mano che P' si avvicina ad uno degli estremi A o B .



Approccio Cinematico

Sia data quindi una circonferenza di raggio R sulla quale si muove un punto P con moto circolare uniforme di periodo T .

Il punto P' si muove con moto armonico, ed indichiamo con S la sua posizione sul diametro AB (che prendiamo verticale solo per nostra comodità).

Stabiliamo di considerare il punto O come punto iniziale, e perciò il segmento OP' corrisponde alla posizione S suddetta (positiva nel caso in cui il punto P' si trovi sopra O e negativa nel caso in cui si trovi sotto).

Per definizione di seno nel triangolo OPP' si ha

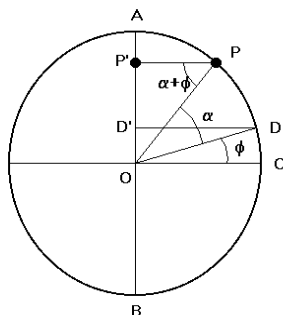
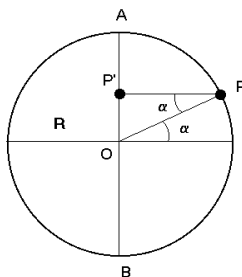
$$\text{sen } \alpha = \frac{OP'}{OP}$$

$$OP' = OP \text{ sen } \alpha$$

$$S = R \text{ sen } \alpha$$

la velocità angolare ω del moto circolare uniforme, è uguale a $2\pi/T$ infatti il tempo necessario per percorrere un angolo giro (2π) corrisponde al periodo T .

Ma nel moto circolare uniforme la velocità angolare è costante e quindi il suo valore non varia se al posto di un angolo giro si prende un angolo qualsiasi α , ed invece del periodo T il tempo t necessario a percorrere tale angolo.



Quindi

$$\omega = 2\pi/T = \alpha/t$$

$$\alpha = \omega t$$

e perciò il moto del punto P' è regolato dalla legge

$$(1) \quad \boxed{S = R \sin \omega t}$$

Supponiamo ora che quando facciamo partire il cronometro per contare i tempi, il punto P non si trovi in corrispondenza dell'angolo $\alpha = 0$, ma abbia già percorso un angolo ϕ .

In altre parole il punto P' comincia a muoversi dal punto D' invece che da O.

Dal punto di vista della legge oraria vista precedentemente, possiamo scrivere

$$S = R \sin (\alpha + \phi)$$

$$(2) \quad \boxed{S = R \sin (\omega t + \phi)}$$

La (2) rappresenta quindi **la legge oraria del moto armonico nella sua forma più generalizzata possibile**, mentre la (1) ne costituisce un caso particolare (quello in cui nell'istante di partenza del cronometro, $t = 0$, l'angolo ϕ sia nullo e P' si trovi in O).

L'angolo ϕ si chiama **sfasamento (o fase)**, il segmento $OD' = S$ prende il nome di **elongazione**, mentre il segmento $OA = R$ è l'**elongazione massima**.

La velocità angolare ω del moto circolare uniforme prende invece il nome di **pulsazione** del moto armonico.

Nella realtà fisica spesso il moto armonico non è legato necessariamente ad un corrispondente moto circolare uniforme: questo ha costituito per noi soltanto un comodo modello matematico cui è possibile ricorrere per studiare facilmente il moto.

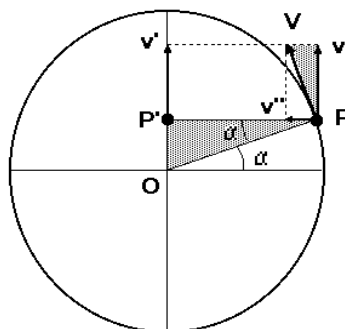
Per esempio un corpo sospeso ad un elastico o ad una molla fissata al soffitto oscilla in su ed in giù con moto armonico: il corrispondente moto circolare uniforme non esiste ma può sempre essere immaginato.

La velocità

Riprendiamo in considerazione il moto armonico ed il corrispondente moto circolare uniforme dal quale esso può considerarsi generato. La velocità con cui si muove il punto P è la velocità tangenziale

$$V = 2\pi R / T$$

La velocità V può essere scomposta nelle due componenti V' e V'' rispettivamente parallela e perpendicolare al moto armonico. La componente V'' determina lo spostamento



orizzontale del punto P, ma non influenza il moto di P' che invece deve il suo spostamento solo alla componente V'.

Proponiamoci di calcolare V' sfruttando la similitudine fra i triangoli tratteggiati:

Nel triangolo grande si ha

$$\cos \alpha = PP'/OP$$

$$PP' = OP \cos \alpha$$

$$PP' = R \cos \omega t$$

Ora, nel triangolo piccolo V sta a V' come nel triangolo grande OP sta ad PP', cioè

$$V : V' = R : R \cos \omega t$$

e risolvendo rispetto a V'

$$V' = VR \cos \omega t / R$$

$$V' = V \cos \omega t$$

$$V' = (2\pi R/T) \cos \omega t$$

$$V' = \omega R \cos \omega t$$

quindi (indicando semplicemente con v la velocità del punto P') si ha nel caso più generico

$$(3) \quad \boxed{v = \omega R \cos (\omega t + \phi)}$$

L'accelerazione

Con un ragionamento analogo a quello sviluppato con la velocità, prendiamo in considerazione la accelerazione cui è sottoposto il punto P (l'accelerazione centripeta è $a = v^2/R = \omega^2 R$), e scomponiamo questa accelerazione nelle due componenti a' ed a'' rispettivamente parallela e perpendicolare al moto del punto P'.

La componente a'' non agisce sul moto di P', ma solo la componente a' che ora ci proponiamo di calcolare.

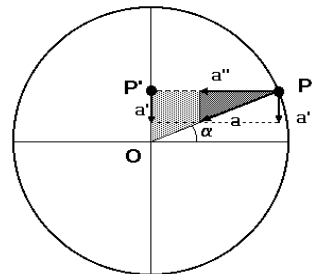
I due triangoli tratteggiati nella figura seguente sono chiaramente simili, quindi possiamo stabilire la proporzione seguente:

Nel triangolo piccolo a sta ad a' come nel triangolo grande OP sta ad OP'
 Cioè

$$a : a' = R : S$$

$$a' = aS / R$$

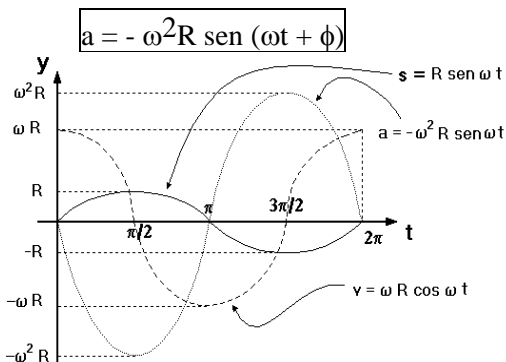
$$a' = \omega^2 RS / R$$



$$a' = \omega^2 S = \omega^2 R \text{ sen } \omega t$$

cioè indicando semplicemente con a' l'accelerazione del punto P', si ha nel caso più generico

(4)



Si noti il segno negativo all'inizio della formula, dovuto al fatto che l'accelerazione ha sempre direzione opposta allo spostamento.

La figura precedente rappresenta i grafici dello spazio, della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo su uno stesso piano cartesiano.

Si noti come lo spazio e l'accelerazione siano entrambi nulli contemporaneamente, mentre uno è massimo quando l'altra è minima e viceversa.

Invece la velocità è nulla negli istanti in cui lo spazio e l'accelerazione assumono valori rispettivamente massimo e minimo.

Precisazione trigonometrica

Nei paragrafi precedenti abbiamo proiettato il moto circolare uniforme sul diametro verticale della circonferenza, allo scopo di arrivare a leggi orarie per lo spazio, velocità ed accelerazione uguali a quelle che si trovano su tutti i libri.

Se avessimo proiettato il moto circolare uniforme sul diametro orizzontale avremmo ottenuto le stesse formule, ma con il seno al posto del coseno e viceversa: la differenza sarebbe stata comunque soltanto formale ed avrebbe cambiato soltanto il valore dello sfasamento ϕ .

È facile infatti dimostrare che il seno ed il coseno di un angolo possono essere messi in relazione fra loro con l'identità

$$\text{sen}(\alpha + \phi) = \text{cos}(\alpha + \gamma) \quad \text{con } \gamma = \phi - \pi/2$$

infatti sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \text{cos}(\alpha + \gamma) &= \text{cos}(\alpha + \phi - \pi/2) = \text{cos}(-\alpha - \phi + \pi/2) = \\ &= \text{cos}(\pi/2 - \alpha - \phi) = \text{cos}[(\pi/2 - \alpha) - \phi] = \end{aligned}$$

$$= \cos(\pi/2 - \alpha)\cos\phi + \sin(\pi/2 - \alpha)\sin\phi$$

E ricordando le identità

$$\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta)$$

$$\cos \theta = \sin(\pi/2 - \theta)$$

si ottiene infine

$$\cos(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi = \sin(\alpha + \phi)$$

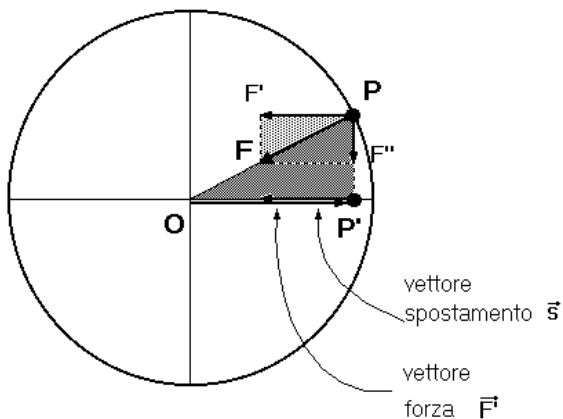
È dunque indifferente proiettare il moto circolare uniforme su un diametro verticale o orizzontale.

Approccio meccanico

Si abbia ora un punto P di massa m e il punto P' (anch'esso di massa m), stavolta (per cambiare) proiettato sul diametro orizzontale, come indicato nella figura a fianco.

Il punto P è sottoposto alla forza centripeta F il cui valore è

$$F = m v^2 / R = \\ m(4\pi^2 R^2 / T^2) / R = \\ 4\pi^2 m R / T^2$$



Scomponiamo questa forza

in due componenti F' e F'': il punto P' che si muove di moto armonico, si muove a causa della sola componente F'.

Proponiamoci di calcolare tale componente sfruttando la similitudine fra i due triangoli tratteggiati.

Nel triangolo piccolo l'ipotenusa F sta al cateto F' come nel triangolo grande l'ipotenusa R sta allo spostamento OP' (che indicheremo semplicemente con S).

Cioè

$$F : F' = R : S \\ F' = F S / R \\ F' = (4\pi^2 m R / T^2) S / R \\ F' = (4\pi^2 m / T^2) S$$

Indichiamo genericamente con K l'espressione costante che si trova fra parentesi, con F la forza F' che produce il moto armonico, e con S il vettore spostamento.

Inoltre osservando la figura precedente si può notare che il vettore spostamento ha sempre verso contrario al vettore forza.

Quindi la legge fisica che caratterizza il comportamento meccanico del moto armonico è

$$(5) \quad \boxed{F = -K S}$$

$$(6) \text{ con } \boxed{K = 4\pi^2 m / T^2}$$

Questa legge è molto importante e permette di stabilire se un moto è armonico o no, con assoluta sicurezza: **un moto è armonico se il rapporto fra forza applicata ed accelerazione è costante e questa costante è negativa.**

Questa costante prende il nome di **costante elastica di richiamo.**

La (6) ci permette di calcolare il **periodo** T del moto armonico: infatti esplicitando T^2 si ha

$$(7) \quad \boxed{T^2 = 4\pi^2 m / K}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

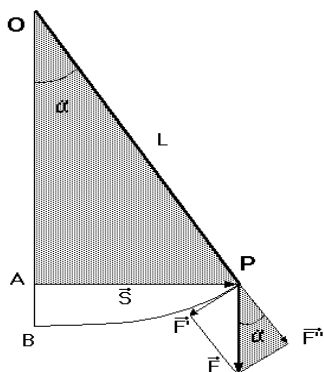
Si noti un particolare estremamente importante: il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni.

Infine osserviamo che la pulsazione ω del moto armonico è data da

$$(8) \quad \boxed{\omega = 2\pi / T = K / m}$$

che si ottiene dalla (7).

Il pendolo



Prendiamo ora in considerazione un punto P di massa m che oscilla intorno ad un punto fisso O , perché ancorato ad esso per mezzo di un filo inestensibile, flessibile e di massa trascurabile rispetto alla massa del punto P .

Dando al punto P un piccolo urto esso oscilla perché la forza peso agisce da forza di richiamo ed il sistema prende il nome di pendolo.

Osservando la figura a sinistra vediamo che l'unica forza agente su P è la forza peso

$$F = m g$$

Questa forza può essere scomposta nelle due componenti F' ed F'' rispettivamente tangente e normale al moto.

La componente F'' è diretta lungo il filo ed ha come unico effetto quello di tenderlo, ma non può influire sul moto del punto P.

L'unica forza responsabile del moto è la forza F' che possiamo calcolare grazie alla solita similitudine fra i due triangoli tratteggiati.

Si ha nel triangolo grande che l'ipotenusa L sta al cateto corto S , come nel triangolo piccolo l'ipotenusa $F = mg$ sta al cateto corto F'

$$L : S = mg : F'$$

cioè

$$F' = mgS/L$$

o anche, indicando semplicemente con F la forza che provoca il moto del punto P, ed osservando che i vettori F ed S sono sempre di verso opposto fra loro,

$$(9) \quad \boxed{F = -K S} \quad \text{con } K = mg/L$$

E questa legge è proprio quella caratteristica dei moti armonici (forza proporzionale allo spostamento, con costante di proporzionalità negativa).

Però abbiamo data per scontata una approssimazione: il punto P in realtà non si muove sul segmento rettilineo AP, ma su un arco di circonferenza PB.

Ebbene, se l'ampiezza delle oscillazioni α non è molto grande (al massimo qualche grado), la differenza fra il segmento AP e l'arco PB è talmente piccola da essere del tutto trascurabile.

Possiamo quindi concludere affermando che per le piccole oscillazioni il pendolo si muove con moto armonico.

Il periodo del pendolo, ricordando la formula (7), è

$$(10) \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Questa formula è molto importante perché se ne possono trarre le seguenti deduzioni:

- Le oscillazioni hanno sempre la stessa durata (sono ISOCRONE) anche se l'ampiezza gradualmente diminuisce, infatti nella (10) non è presente l'ampiezza delle oscillazioni α .
- Il periodo non dipende dalla massa, infatti nella (10) non è presente la massa.
- Il periodo è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza del pendolo.
- Il periodo è inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'accelerazione di gravità.

Concludiamo con un paio di importanti considerazioni finali:

Ogni oggetto che ruoti tende a mantenere costante l'orientamento del proprio piano di rotazione. Anche il pendolo oscillando descrive una parziale rotazione e quindi tende a mantenere invariato il piano di oscillazione.

In effetti il piano di un pendolo (se il filo cui esso è sospeso non è rigido), sembra ruotare lentamente, ma in effetti è **la Terra che ruota attorno al pendolo mentre questo continua ad oscillare sul proprio piano.**

Quando un pendolo viene usato in questo modo per dimostrare la rotazione della terra, si chiama **pendolo di Foucault.**

Inoltre la formula (10) può essere usata per calcolare il valore dell'accelerazione di gravità g : basta calcolare T , misurare L e applicare la formula inversa

$$(11) \quad \boxed{g = 4\pi^2 L / T^2}$$

Una equazione dimensionale

Il periodo del pendolo può anche essere ricavato ricorrendo alle equazioni dimensionali.

Supponiamo di non conoscere la formula (7) del periodo, ma sappiamo che il periodo T dipende dalla lunghezza L , probabilmente dalla massa che oscilla e dal valore g dell'accelerazione di gravità.

In altre parole il periodo è proporzionale a tali grandezze: genericamente poniamo

$$(12) \quad \boxed{T = C l^\alpha m^\beta g^\gamma}$$

dove C è un numero puro e rappresenta la costante di proporzionalità, mentre α , β e γ costituiscono tre opportuni esponenti che ci proponiamo di determinare.

La costante di proporzionalità C , essendo un numero puro non ha dimensioni fisiche (indica soltanto quante volte il primo membro è più grande o più piccolo del secondo).

Dal punto di vista dimensionale quindi, poiché il primo membro è un tempo, anche il secondo membro deve avere le dimensioni di un tempo.

Per indicare che stiamo eseguendo un calcolo dimensionale, usiamo le parentesi quadre (adottando così una diffusa convenzione scientifica).

La relazione precedente diviene allora

$$[t] = [l^\alpha] [m^\beta] [g^\gamma]$$

(la costante adimensionale C viene ignorata nelle equazioni dimensionali).

Ma la accelerazione g è una lunghezza fratto un tempo al quadrato, e perciò

$$[t] = [l^\alpha [m^\beta] \left[\left(\frac{l}{t^2} \right)^\gamma \right]$$

$$[t^1] = [l^{\alpha+\gamma} [m^\beta] [t^{-2\gamma}]$$

Questa uguaglianza è vera quando gli esponenti soddisfano le seguenti condizioni

$$1 = -2\gamma$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\beta = 0$$

Queste costituiscono un sistema che risolto fornisce

$$\gamma = -1/2$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha = 1/2$$

Sostituendo nella relazione (12) si ottiene

$$(13) \quad T = C \sqrt{\frac{l}{g}}$$

sostanzialmente identica alla (10), con l'unica differenza della costante C di proporzionalità (adimensionale), che in questo caso rimane sconosciuta.

L'energia nel moto armonico

La legge meccanica del moto armonico, è

$$(14) \quad F = -K s$$

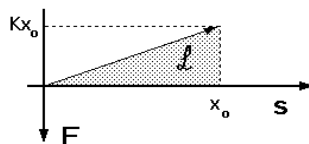
su un piano cartesiano corrisponde ad una retta con coefficiente angolare K.

La (14) nel piano FORZA - SPOSTAMENTO corrisponde ad una retta, vedi la figura seguente dove per comodità abbiamo diretto verso il basso l'orientazione dell'asse delle ordinate per fare in modo che il triangolo tratteggiato si trovasse nel primo quadrante.

Con un ragionamento perfettamente analogo a quello già noto dalla cinematica (dove l'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse nel grafico TEMPO - VELOCITÀ corrisponde allo SPAZIO percorso), il triangolo tratteggiato ha un'area che corrisponde ad un lavoro (infatti spazio per forza è dimensionalmente un lavoro).

In altre parole, il lavoro necessario per esempio per distendere una molla di una lunghezza x_0 , corrisponde all'area tratteggiata, e cioè

$$L = x_0 (K x_0) / 2 = 1/2 K x_0^2$$



Il lavoro però è negativo perché compiuto dalla forza elastica che si oppone allo spostamento.

$$(15) \quad L = -\frac{1}{2} k x_0^2$$

Se ora si lascia libera la molla di tornare alla posizione di equilibrio, il sistema restituisce lo stesso lavoro L immagazzinato precedentemente, ma positivo. Quindi il lavoro che si deve fare per allungare la molla corrisponde all'energia potenziale acquistata dalla molla stessa, e tale energia è positiva

$$L = -\Delta U \quad \text{cioè} \quad \Delta U = 1/2 K x_0^2$$

Prendendo in considerazione anche l'energia cinetica, si ha l'energia meccanica totale di un oscillatore armonico

$$(16) \quad \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x_0^2 = \text{costante}$$

Funzione lineare in seno e coseno

Per concludere la trattazione del moto armonico, vogliamo ora dimostrare che ogni funzione del tipo

$$(17) \quad y = a \sin x + b \cos x$$

è sempre una sinusoidale, quindi il moto armonico può assumere anche questa forma matematica.

Poniamo:

$$(18) \quad a = r \cos \alpha \quad b = r \sin \alpha$$

Sostituendo nelle (17) si ottiene

$$(19) \quad y = r \sin x \cos \alpha + r \cos x \sin \alpha$$

$$y = r \sin(x + \alpha)$$

ma dalle (18) si può ricavare quadrando e sommando

$$a^2 + b^2 = r^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e, dividendo la seconda per la prima

$$b/a = \tan \alpha \quad \text{e quindi} \quad \alpha = \arctan(b/a)$$

Sostituendo queste ultime due espressioni nella (19), si ha

$$(20) \quad y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \arctan \frac{b}{a} \right)$$

Che rappresenta una sinusoidale opportunamente amplificata (o attenuata) nelle ordinate, e sfasata (cioè traslata a destra o a sinistra).

Questa formula può sembrare complessa, ma applichamola per esempio alla funzione

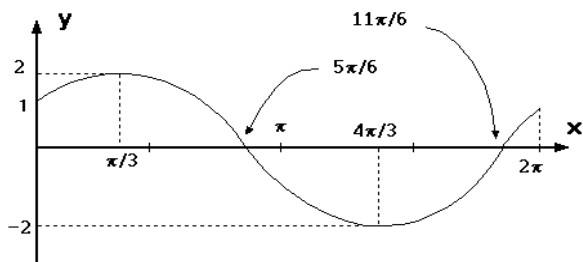
$$y = 3 \operatorname{sen} x + \cos x$$

Applicando la (20) si ottiene

$$(21) \quad \boxed{y = 2 \operatorname{sen}(x + \pi/6)}$$

Il grafico della (21) si ricava immediatamente (cfr. figura qui sotto), senza l'ausilio dell'analisi ma con semplici considerazioni trigonometriche:

Per $x = 0$ si ha l'intersezione con l'asse y



La funzione si annulla quando l'argomento del seno è uguale a π o a 2π .

Cioè quando $x = 5\pi/6$ o $x = 11\pi/6$.

La funzione ha un massimo quando il seno è uguale ad 1, cioè quando $x = \pi/3$.

La funzione ha un minimo quando il seno è -1 , cioè quando $x = 4\pi/3$.

OTTICA

La luce: onde o corpuscoli?

Per molto tempo si cercò di stabilire se la luce fosse dovuta ad una emissione di particelle (che si propagano in linea retta, hanno una loro massa ed una loro velocità, e che si chiamano **fotoni**) o di onde (onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto e che hanno una loro frequenza.).

Alcuni fenomeni fisici possono essere spiegati solo considerando la luce come un'onda, altri invece considerandola come una particella.

Ma la luce è un'onda o una particella ?

Per rispondere occorre ricordare che la fisica è costituita da **modelli** (elaborati osservando la natura, il mondo circostante, stabilendo delle "leggi matematiche", e controllando infine se queste leggi sono corrette) che hanno dei limiti di validità, e che non sono necessariamente veri in ogni situazione.

Pensate per esempio all'assurdo cui si può arrivare cercando di trasferire attributi "normali" ad una particella :

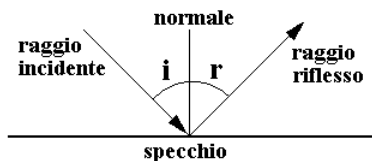
- ✓ Un elettrone è liscio o rugoso?
- ✓ Di che colore è?
- ✓ Che odore ha?
- ✓ È duro o morbido?

e così via.

Il modello corretto per studiare i fenomeni a livello atomico (e quindi anche la luce) è la fisica quantistica (che però è molto complessa e richiede conoscenze approfondite e specialistiche.)

In questa unità tratteremo sempre la luce come un corpuscolo che si muove in linea retta. Questo "modello" dell'ottica prende anche il nome di **ottica geometrica**.

Le leggi di Snellius-Cartesio



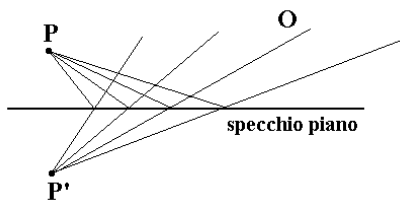
- ✓ **PRIMA LEGGE:** Il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale al punto di incidenza giacciono sempre su uno stesso piano.
- ✓ **SECONDA LEGGE:** L'angolo di incidenza i e l'angolo di riflessione r sono sempre uguali fra loro.

Gli specchi piani

Vale sempre il principio di invertibilità del cammino ottico (se un raggio luminoso partendo da un punto A arriva in un altro punto B, allora se partisse da B tornerebbe in A).

Da P escono infiniti raggi luminosi che urtando lo specchio vengono riflessi (con le leggi di Snellius - Cartesio).

Un osservatore posto in O riceve i raggi luminosi "come se" uscissero dal punto P'. Quindi ad un oggetto posto in P corrisponde una immagine posta in P'.



P e P' si dicono **punti coniugati**.

Uno specchio divide il piano in coppie di punti coniugati. L'immagine P' di uno specchio piano è sempre virtuale.

Una immagine è reale se è possibile invertire le posizioni dell'oggetto e dell'immagine.

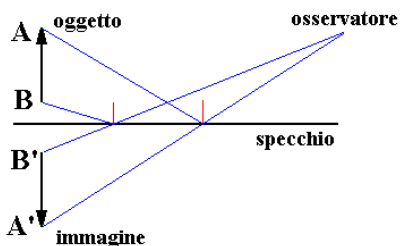
Nel caso dello specchio piano l'immagine è sempre **virtuale** perchè non si può realizzare l'inversione suddetta: infatti non è possibile porre l'immagine in P' cioè dietro lo specchio.

Destra o sinistra?

A	E	Э	A
M	S	Ƨ	M
O	C	Ɔ	O
	A	A	

Se ponete davanti ad uno specchio delle parole le vedrete rovesciate orizzontalmente.

Però se le parole sono scritte verticalmente, non si ha una inversione alto con basso.



Alcune lettere simmetriche rimangono invariate, ma lo specchio inverte DESTRA con SINISTRA, ma non ALTO con BASSO.

Come mai ?

Lo specchio inverte sempre rispetto ad un piano e il capovolgimento dell'immagine dipende da come è

posizionato lo specchio rispetto all'osservatore.

Lo specchio inverte destra con sinistra ma anche alto con basso!

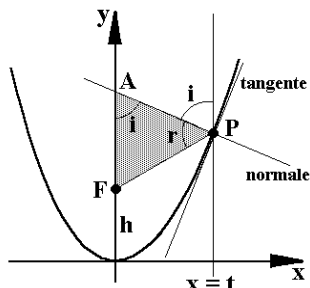


Gli specchi parabolici

Consideriamo uno specchio concavo di forma parabolica. Si può immaginare generato da una parabola che ruota attorno al suo asse di simmetria.

Un raggio luminoso parallelo all'asse della parabola, la urta in P e viene deviato in modo da passare per il fuoco F (si notino gli angoli i ed r , con vertice in P, uguali fra loro per la seconda legge di Snellius).

Ma anche l'angolo con vertice in A è uguale ad i (angoli alterni interni).



Se calcoliamo la retta normale AP e determiniamo le coordinate di A, basta mostrare che il triangolo AFP è isoscele ($AF = FP$) per dimostrare che il raggio luminoso dopo aver colpito lo specchio in P viene deviato sempre in modo da passare per F.

Riferiamoci ad una parabola generica che però immaginiamo abbia il vertice nell'origine e l'asse coincidente con l'asse y (queste condizioni non tolgono nulla alla genericità della parabola, perché basta scegliere opportunamente gli assi coordinati).

La sua equazione è

$$y = \frac{1}{4h} x^2$$

dove il fuoco ha coordinate

$$F \equiv (0; h)$$

Consideriamo ora una generica retta verticale $x=t$. Sostituendo t nella equazione della parabola si trova

$$P \equiv \left(t; \frac{t^2}{4h} \right)$$

L'equazione del fascio di rette passanti per P è

$$y - \frac{t^2}{4h} = m(x - t)$$

mettiamo ora a sistema questo fascio di rette con la parabola

$$\left| \begin{array}{l} y - \frac{t^2}{4h} = m(x - t) \\ y = \frac{1}{4h} x^2 \end{array} \right.$$

Risolviamo

$$\frac{x^2}{4h} - \frac{t^2}{4h} = mx - mt$$

$$x^2 - t^2 = 4mhx - 4mht$$

$$x^2 - 4mhx + 4mht - t^2 = 0$$

ponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ha $4m^2h^2 - 4mht + t^2 = 0$

e cioè

$$(2mh - t)^2 = 0$$

$$m = \frac{t}{2h}$$

che è il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nel punto P. Il coefficiente angolare della retta normale è allora l'antireciproco, e tale normale ha equazione

$$y - \frac{t^2}{4h} = -\frac{2h}{t}(x - t)$$

o meglio

$$y = -\frac{2h}{t}x + 2h + \frac{t^2}{4h}$$

L'intersezione con l'asse y si ha per

$$y = \frac{8h^2 + t^2}{4h}$$

e quindi le coordinate del punto A sono

$$A \equiv \left(0; \frac{8h^2 + t^2}{4h} \right)$$

La lunghezza del segmento AF è allora

$$AF = \frac{8h^2 + t^2}{4h} - h = \frac{4h^2 + t^2}{4h}$$

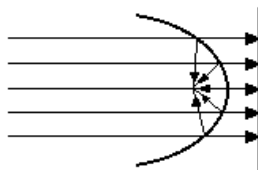
Calcoliamo ora la lunghezza del segmento PF

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{t^2 \left(\frac{t^2}{4h} - h \right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{(t^2 - 4h^2)^2}{16h^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{16h^2t^2 + t^4 - 8h^2t^2 + 16h^4}{16h^2}} = \frac{4h^2 + t^2}{4h} \end{aligned}$$

Quindi il triangolo APF è isoscele e il raggio luminoso dopo aver colpito lo specchio passa per il fuoco F.

Poiché la retta verticale $x = t$ è generica, resta così dimostrato che ogni raggio luminoso parallelo all'asse della parabola passa per il fuoco.

Al contrario (per il principio di invertibilità del cammino ottico) se un raggio luminoso esce



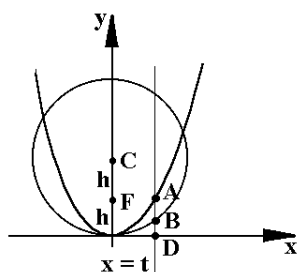
dal fuoco, colpisce lo specchio e viene sempre deviato in modo da uscire parallelamente all'asse della parabola.

In altre parole il fuoco e l'infinito sono punti coniugati.

Notiamo infine un particolare. Confrontiamo fra loro due fasci di raggi luminosi: il primo non deviato dallo specchio, ed il secondo con tutti i raggi luminosi che convergono nel fuoco.

In entrambi i casi i raggi luminosi seguono percorsi che hanno la stessa lunghezza (se immaginiamo che i raggi luminosi siano costituiti da un gruppo di particelle tutte allineate fra loro, queste convergeranno nel fuoco raggiungendolo tutte nello stesso istante).

Gli specchi sferici



La realizzazione di un buon specchio parabolico è piuttosto costosa da ottenere: è molto più semplice costruire specchi di forma sferica.

Vedremo fra poco che con ottima approssimazione uno specchio parabolico può essere sostituito con uno sferico, purché la sua apertura sia piccola.

Le equazioni della parabola e della circonferenza sono rispettivamente

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4h} x^2 \\ x^2 + y^2 - 4hy = 0 \end{cases}$$

Confrontiamo fra loro la parabola e la circonferenza mostrate nella figura precedente.

Il fuoco della parabola è

$$F \equiv (0; h)$$

mentre la circonferenza ha il centro in $C \equiv (0; 2h)$ e passa per l'origine.

Quindi F è il punto medio fra C e l'origine degli assi.

Consideriamo poi una generica retta verticale $x=t$ ed i due punti di intersezione A e B. Le coordinate dei punti A e B sono

$$A \equiv \left(t; \frac{t^2}{4h} \right)$$

$$B \equiv \left(t; 2h - \sqrt{4h^2 - t^2} \right)$$

e perciò i segmenti AD e BD hanno lunghezza

$$AD = \frac{t^2}{4h}$$

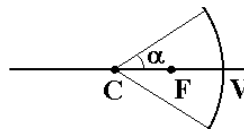
$$BD = 2h - \sqrt{4h^2 - t^2}$$

Mettiamoli a rapporto e facciamo il limite per t che tende a zero.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{AD}{BD} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{4h}}{2h - \sqrt{4h^2 - t^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{4h} (2h + \sqrt{4h^2 - t^2})}{(2h + \sqrt{4h^2 - t^2})(2h - \sqrt{4h^2 - t^2})} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{4h} (2h + \sqrt{4h^2 - t^2})}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2h + \sqrt{4h^2 - t^2}}{4h} = 1 \end{aligned}$$

Risulta quindi che per t che tende a zero i due segmenti AD e BD tendono a diventare uguali.

In altre parole l'arco di parabola può essere sostituito con un arco di circonferenza (con raggio pari al doppio della distanza focale della parabola) l'errore è tanto più trascurabile quanto più piccola è l'apertura α dello specchio.



È per questi motivi che nell'ottica geometrica si parla sempre di specchi sferici invece che parabolici.

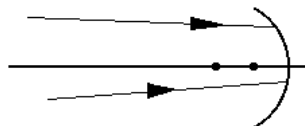
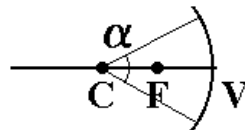
Tutte le rette passanti per C si chiamano **assi** dello specchio. Fra questi quello che passa per V (centro dello specchio), si chiama **asse principale**.

Le approssimazioni di Gauss

Le leggi dell'ottica geometrica sono valide solo se sono rispettate le due "approssimazioni di Gauss".

1. Gli specchi sferici devono avere una piccola apertura, cioè un angolo α sufficientemente piccolo.
2. I raggi devono essere parassiali, cioè quasi paralleli all'asse ottico principale.

Non esiste un limite netto di demarcazione, superato il quale le leggi non sono più valide.



Maggiormente sono rispettate queste condizioni e tanto più risultano valide le considerazioni e le leggi dell'ottica geometrica.

Costruzione grafica delle immagini

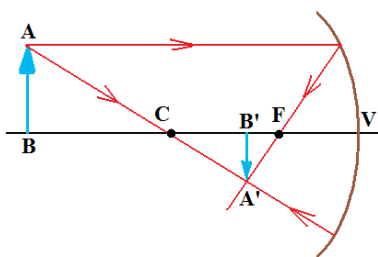
Una caratteristica degli assi ottici, di tutti gli assi ottici, non solo quello principale, consiste nel fatto che ogni loro punto ha una immagine (cioè il corrispondente punto coniugato) che si trova sempre sullo stesso asse. Ogni retta passante per il centro dello specchio sferico, è un asse ottico. L'asse ottico principale è invece quello che passa per il centro della porzione di specchio sferico che stiamo usando.

Da ogni punto escono infiniti raggi luminosi. Per individuare la posizione delle immagini si possono prendere in considerazione tre raggi caratteristici fra gli infiniti:

- ✓ Quello parallelo all'asse ottico principale, che urtando lo specchio viene deviato in modo da passare per il fuoco.
- ✓ Quello che passa per il fuoco, che al contrario diviene parallelo all'asse ottico principale.
- ✓ Quello che passa per il centro, che colpisce lo specchio normalmente e quindi ritorna indietro lungo la stessa direzione da cui è arrivato.

Esaminiamo alcuni casi particolarmente rappresentativi.

1° Caso – specchi concavi (immagine reale)



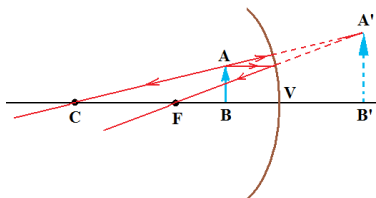
Se l'oggetto AB è più lontano del centro, l'immagine A'B' è reale, rovesciata, impicciolita, e situata fra centro e fuoco.

Per il principio di invertibilità del cammino ottico, se l'oggetto A'B' è posto invece fra centro e fuoco, allora l'immagine AB è reale, rovesciata, ingrandita, e situata oltre il centro.

2° Caso – specchi concavi (immagine virtuale)

Se l'oggetto AB è posto fra fuoco e specchio, l'immagine A'B' è virtuale, dritta e ingrandita.

Poichè l'immagine è virtuale e si forma dietro lo specchio, non è possibile applicare il principio di invertibilità del cammino ottico.

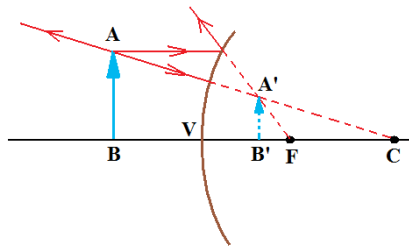


3° Caso – specchi convessi

In questo caso, dato che il centro e il fuoco si trovano dietro lo specchio, è possibile una sola situazione.

L'oggetto AB ha una immagine A'B' virtuale, dritta e impicciolita.

Anche qui non è possibile applicare il principio di invertibilità del cammino ottico.



La formula dei punti coniugati

Permette di ottenere la posizione dell'immagine con un calcolo (valido nei limiti delle approssimazioni di Gauss) e non con una costruzione grafica (che comunque è sempre approssimata in modo piuttosto grossolano).

Siano h_o e h_i rispettivamente le altezze dell'oggetto e dell'immagine.

Mentre o ed i sono le distanze dell'oggetto e dell'immagine dal fuoco, ed f infine è la distanza focale.

I triangoli grigi sono a due a due simili fra loro.

Si possono allora stabilire le seguenti proporzioni fra lati corrispondenti:

$$\begin{cases} h_o : o = h_i : f \\ h_o : f = h_i : i \end{cases}$$

Il prodotto dei medi deve essere uguale al prodotto degli estremi, e quindi

$$\begin{cases} h_o \cdot f = h_i \cdot o \\ h_o \cdot i = h_i \cdot f \end{cases}$$

dividendo membro a membro si ha

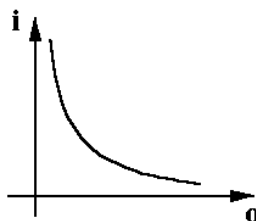
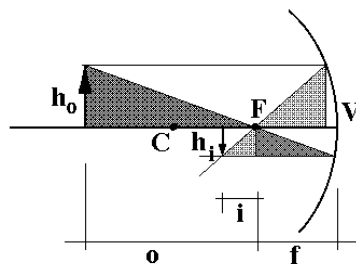
$$\frac{f}{i} = \frac{o}{f}$$

e cioè

$$oi = f^2$$

Riportando su un grafico questa funzione, si ha un ramo di iperbole equilatera.

Talvolta però si preferisce riferire le posizioni



dell'oggetto e dell'immagine allo specchio invece che al fuoco.

Indicando con p la distanza dell'oggetto dallo specchio e con q la distanza dell'immagine dallo specchio, si può allora scrivere

$$\begin{cases} p = o + f \\ q = i + f \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} o = p - f \\ i = q - f \end{cases}$$

e sostituendo nella funzione della iperbole equilatera ricavata precedentemente, si ha

$$(p - f)(q - f) = f^2$$

Cioè, sviluppando,

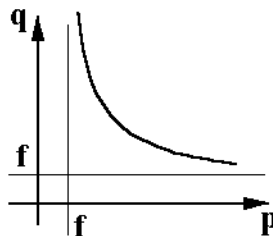
$$pq - pf - fq + f^2 = f^2$$

e semplificando

$$fq + fp = pq$$

si ottiene infine (dividendo i due membri per pq)

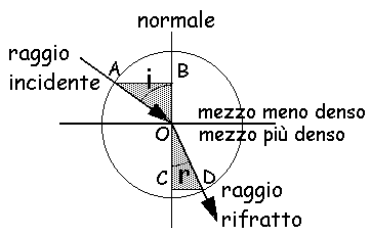
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



che corrisponde ancora ad una iperbole (esplicitando rispetto a q si riconosce una funzione omografica, cioè una iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi coordinati).

Le due equazioni dei punti coniugati (espresse in funzione di o ed i , oppure in funzione di p e q), sono perfettamente equivalenti fra loro.

Leggi di Snellius–Cartesio per la rifrazione



Quando un raggio luminoso incontra un ostacolo può anche attraversarlo, se questo è trasparente. Basta pensare per esempio ad un raggio luminoso che passa dall'aria all'acqua (o viceversa).

Il raggio luminoso in questo caso devia, si spezza e, passando da un mezzo ad un altro più denso, si avvicina alla normale.

Questo fenomeno si chiama **rifrazione** (da "frangere" = rompere, spezzare).

La rifrazione, analogamente alla riflessione, ubbidisce a due leggi:

- ✓ **PRIMA LEGGE:** Il raggio incidente, il raggio rifratto e la normale al punto di incidenza giacciono sempre su uno stesso piano.
- ✓ **SECONDA LEGGE:** L'angolo di incidenza i e l'angolo di rifrazione r soddisfano la legge

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n_{1,2}$$

dove $n_{1,2}$ è una costante che si chiama **indice di rifrazione relativo** fra i due mezzi, e dipende dalla velocità della luce nei due mezzi.

Poiché l'indice di rifrazione si ricava sperimentalmente ed il numero delle possibili coppie di mezzi trasparenti è molto alto, torna utile definire l'**indice di rifrazione assoluto** di un singolo mezzo trasparente, che si calcola mettendo in relazione la velocità della luce nel vuoto e nel mezzo in esame.

Per esempio nel mezzo 1 si ha l'indice assoluto $n_1 = \frac{c}{v_1}$ e nel mezzo 2

$$n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Il rapporto fra i due indici di rifrazione assoluti fornisce l'indice di rifrazione relativo fra i due mezzi

$$n_{1,2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2}$$

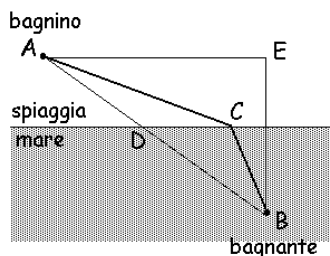
In questo modo diminuisce notevolmente il numero di costanti che occorre inserire in una tabella di valori ricavati sperimentalmente.

Perché un raggio luminoso si spezza?

Immaginiamo che un bagnino sulla spiaggia veda una bagnante sul punto di affogare, e corra per salvarla.

Ovviamente la velocità v_1 con cui il bagnino corre sulla sabbia è maggiore della velocità v_2 con cui lo stesso nuota in mare.

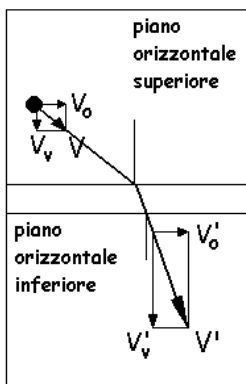
Se il bagnino andasse da A a B in linea retta (passando per D), o se percorresse la traiettoria ad angolo retto AE + EB, in entrambi i casi impiegherebbe un tempo maggiore rispetto a quello che sarebbe necessario per seguire una opportuna traiettoria intermedia AC + CB.



Ebbene (come sempre accade in natura) i fenomeni avvengono sempre con il minimo dispendio di energia, così gonfiando un palloncino questo assume la forma sferica perché la quantità di gas in esso contenuto con la forma sferica occupa la minor superficie possibile, e si potrebbe continuare con molti altri esempi.

Nel caso della rifrazione la luce descrive una traiettoria che le consente sempre di arrivare nel minor tempo possibile, e questa (come nel caso del bagnino) corrisponde alla spezzata AC + CB.

Incongruenza dell'ottica geometrica



Cerchiamo di dimostrare la seconda legge di Snellius-Cartesio

$$\left(\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{1,2} \right) \text{ per mezzo dell'ottica geometrica.}$$

Consideriamo due piani orizzontali leggermente sfalsati fra loro e raccordati con un piccolo piano inclinato, come in figura.

Sul piano superiore poniamo una sferetta di massa m ed imprimiamo ad essa una velocità iniziale V (non teniamo conto dell'eventuale attrito fra sfera e piano). Questa procede in linea retta fino all'inizio del piano inclinato, poi aumenta la propria velocità scendendo

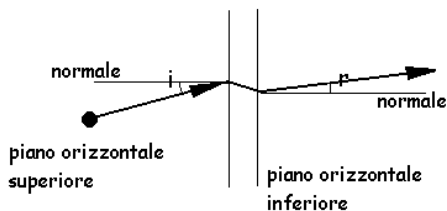
per il piano inclinato proseguendo infine (con velocità maggiore V') in linea retta lungo il piano orizzontale inferiore.

Trascuriamo ciò che avviene lungo il breve piano inclinato e mettiamo a confronto le velocità nei due piani orizzontali scomponendole nelle loro componenti orizzontali e verticali.

La velocità V' è maggiore di V . Infatti indicando con h il dislivello fra i due piani, si ha

$$V' = V + \sqrt{2gh} \quad \text{e quindi} \quad V' > V$$

Ma le due componenti orizzontali V_o e V'_o sono uguali, ed allora deve essere $V'_v > V_v$.



Quindi la traiettoria della sferetta ha un andamento analogo al percorso seguito dalla luce quando passa da un mezzo ad un altro più denso, avvicinandosi alla normale.

Però a questo punto si ha una incongruenza fra il risultato che abbiamo ottenuto e il comportamento reale della luce.

Infatti mentre la luce nel mezzo più denso ha **velocità minore**, nel nostro caso la sferetta ha nel piano inferiore una **velocità maggiore**.

Non c'è stato nessun errore nel ragionamento. Anche se cercassimo di spiegare il comportamento della luce nella rifrazione con altre considerazioni che presuppongano la luce come la emissione di particelle dotate di una loro massa e velocità, arriveremmo sempre alla stessa incongruenza finale.

Semplicemente il modello corpuscolare della luce è inadeguato per interpretare correttamente la realtà fisica.

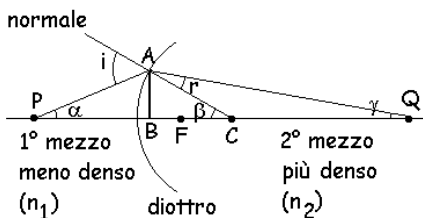
Occorre, come vedremo, considerare la luce come **la emissione di onde elettromagnetiche** per spiegare correttamente la rifrazione.

Il diottro sferico

Si chiama diottro la superficie di separazione fra due mezzi trasparenti, per esempio aria e vetro.

Quando la luce attraversa un diottro subisce una rifrazione. Se il diottro è sferico e se prendiamo in considerazione solo raggi luminosi parassiali, possiamo cercare di determinare una formula per trovare i punti coniugati.

La ragione per cui stiamo trattando il diottro risiede nel fatto che una lente può essere considerata come due diottri consecutivi in quanto la luce passa prima dall'aria al vetro e poi dal vetro all'aria.



Consideriamo dunque un diottro sferico con raggio $AC = r$ e un punto P. Ci proponiamo di determinare la sua immagine Q.

Fra gli infiniti raggi luminosi uscenti da P consideriamo quello (parassiale) che attraversa il diottro nel punto A.

Nel triangolo PAC si ha

$$i = \alpha + \beta$$

(in quanto un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti).

Analogamente nel triangolo ACQ si ha

$$\beta = r + \gamma \quad \text{cioè} \quad r = \beta - \gamma$$

Possiamo allora scrivere

$$\begin{cases} \text{sen}i = \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen}\beta \\ \text{sen}r = \text{sen}(\beta - \gamma) = \text{sen}\beta \cos \gamma - \cos \beta \text{sen}\gamma \end{cases}$$

ma poiché il raggio è parassiale gli angoli α β γ sono piccolissimi e quindi **il loro coseno è circa uguale ad 1**.

Si può allora scrivere

$$\begin{cases} \text{sen}i \cong \text{sen}\alpha + \text{sen}\beta \\ \text{sen}r \cong \text{sen}\beta - \text{sen}\gamma \end{cases}$$

Inoltre nei triangoli rettangoli ABP e ABQ si ha

$$\begin{cases} \text{sen}\alpha = \frac{AB}{AP} \\ \text{sen}\beta = \frac{AB}{AC} \\ \text{sen}\gamma = \frac{AB}{AQ} \end{cases}$$

Sempre a causa del fatto che il raggio luminoso preso in considerazione è parassiale, possiamo indicare con **p** la distanza AP del punto P (l'oggetto) dal diottero, con **q** la distanza AQ del punto Q (l'immagine) dal diottero, e con **r** il raggio AC di curvatura della superficie sferica.

Risulta quindi

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta}{\text{sen}\beta - \text{sen}\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{\frac{AB}{p} + \frac{AB}{r}}{\frac{AB}{r} - \frac{AB}{q}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$$

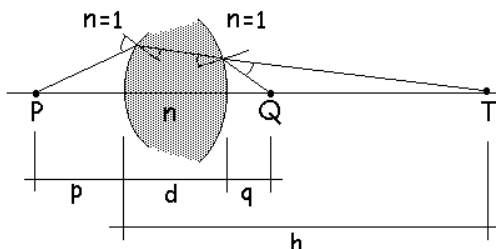
Semplificando si ottiene

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{r} = \frac{n_2}{r} - \frac{n_2}{q}$$

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Quest'ultima relazione rappresenta l'equazione dei punti coniugati del diottro. In altre parole ponendo un oggetto in A la sua immagine si forma in B e viceversa.

Le lenti sottili



Consideriamo ora una lente le cui due facce (non necessariamente uguali) siano costituite da due superfici sferiche rispettivamente di raggio r_1 (quella a sinistra) e r_2 (quella a destra).

Come indicato in figura essa può considerarsi come la successione di due diottri consecutivi.

L'indice di rifrazione dell'aria è circa **uguale ad uno**, e possiamo porre uguale ad n l'indice di rifrazione del vetro della lente.

Consideriamo ora un generico punto P .

Se non ci fosse il secondo diottro l'immagine di P si formerebbe in T , e la sua posizione potrebbe essere calcolata con la formula

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{h} = \frac{n-1}{r_1}$$

Ora invece occupiamoci del secondo diottro (ignorando il primo): trattiamo il punto T come "oggetto" e vediamo dove si forma la sua "immagine".

Poiché la distanza del punto T dal secondo diottro è $h-d$, ma il punto T si trova a destra del diottro, la sua posizione deve essere considerata negativa $-(h-d)$.

La posizione della immagine corrispondente è quindi q , calcolabile con la formula

$$-\frac{n}{h-d} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{r_2}$$

Ebbene, se la lente è sottile possiamo porre $d \cong 0$ e la relazione può essere trasformata nella

$$(2) \quad -\frac{n}{h} + \frac{1}{q} = -\frac{n-1}{r_2}$$

Ora sommando membro a membro la (1) e la (2), si ottiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

che rappresenta l'equazione dei punti coniugati per una lente sottile.

Ora calcoliamo i due fuochi f_1 ed f_2 allontanando fino all'infinito prima il punto P e poi il punto Q.

Si ha:

$$\begin{cases} p = \infty \\ q = f_2 \end{cases} \text{ e perciò } \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\begin{cases} p = f_1 \\ q = \infty \end{cases} \text{ e perciò } \frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Si può notare una conclusione molto importante: **per le lenti sottili i due fuochi f_1 ed f_2 sono sempre uguali fra loro anche se le curvature dei diottri sono diverse.**

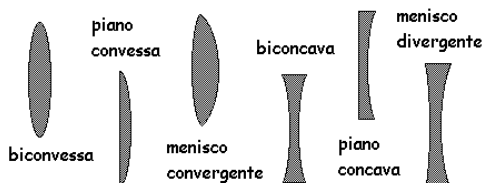
Ponendo allora

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{si ha}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

che è la formula dei punti coniugati per le lenti (sottili).

Classificazioni delle lenti



Le lenti possono essere suddivise in sei tipi fondamentali: tre **convergenti** (perché fanno convergere un fascio di raggi paralleli in un punto) e tre

divergenti (perché in questo caso i raggi paralleli divergono fra loro dopo aver attraversato la lente).

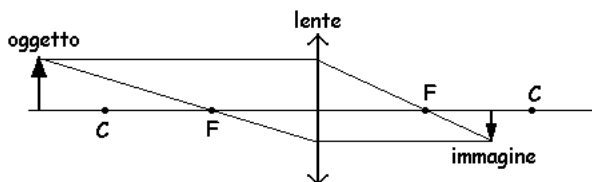
Determinazione grafica delle immagini

Le lenti sottili spesso sono rappresentate simbolicamente nel modo seguente:

- ✓ Quelle convergenti con un segmento avente agli estremi le punte di una freccia.
- ✓ Quelle divergenti con un segmento avente agli estremi le punte rovesciate di una freccia.

Per determinare graficamente la posizione dell'immagine, come per gli specchi, si possono utilizzare due (su tre) raggi luminosi particolari:

- ✓ Quello parallelo all'asse ottico principale che viene deviato e passa per il fuoco.
- ✓ Quello che passa per il fuoco e viene deviato uscendo parallelamente all'asse ottico.
- ✓ Quello che passa per il centro della lente e che non viene deviato.



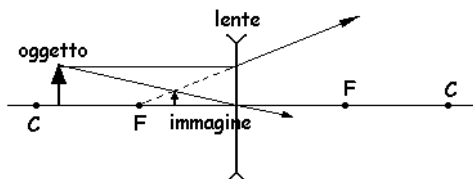
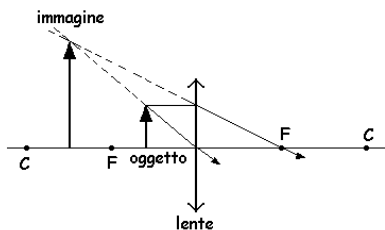
Vediamo ora dove si forma l'immagine per una lente sottile convergente, quando l'oggetto si trova oltre il centro di curvatura C.

La figura a fianco mostra che l'immagine è reale, capovolta, impiccolita e si forma fra il fuoco ed il centro (opposti).

Per il principio di invertibilità del cammino ottico, quando l'oggetto si trova fra fuoco e centro, l'immagine è reale capovolta, ingrandita e posta oltre il centro (opposto).

Ora poniamo l'oggetto fra fuoco e lente. L'immagine è virtuale (perché ponendo l'oggetto al posto dell'immagine non si ha la situazione simmetrica), dritta, ingrandita.

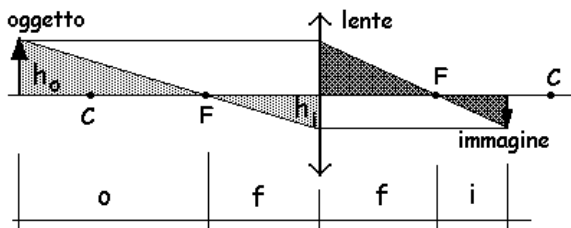
Si può anche stabilire che l'immagine è virtuale quando si forma sul **prolungamento** (tratteggiato) dei raggi luminosi.



Rimane da analizzare il caso delle lenti divergenti.

Osservando la figura a fianco si comprende facilmente che l'immagine è virtuale dritta e impiccolita.

Ancora sui punti coniugati per le lenti



Vogliamo ora ricavare in altro modo (analogo a quello adoperato per gli specchi sferici), la formula dei punti coniugati.

Indichiamo con o e i le distanze dell'oggetto e dell'immagine da ciascun fuoco, e con f la distanza focale.

I triangoli tratteggiati in figura sono simili a due a due. Indichiamo con h_o e con h_i (come per gli specchi) le altezze rispettive dell'oggetto e dell'immagine.

Valgono le proporzioni:

$$\begin{cases} h_o : o = h_i : f \\ h_o : f = h_i : i \end{cases}$$

che possiamo trasformare moltiplicando fra loro medi ed estremi

$$\begin{cases} h_o f = h_i o \\ h_o i = h_i f \end{cases}$$

Dividendo membro a membro, si ha

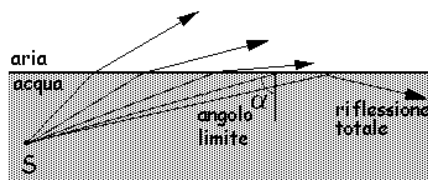
$$\frac{f}{i} = \frac{o}{f}$$

$$oi = f^2$$

che è formalmente identica a quella trovata per gli specchi sferici.

L'angolo limite

Sappiamo che un raggio luminoso passa da un mezzo ad un altro meno denso (per esempio dall'acqua all'aria), si allontana dalla normale rispettando la seconda legge di Snellius sulla rifrazione.



Dalla figura si può notare che esiste un

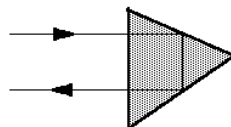
angolo α di incidenza (detto **angolo limite**) il cui angolo di rifrazione è esattamente di 90° .

Per angoli di incidenza maggiori dell'angolo limite il raggio luminoso non riesce a passare nell'altro mezzo e viene riflesso indietro (con le leggi della riflessione).

Questo fenomeno si chiama **riflessione totale**.

Conseguenze della riflessione totale

Il fenomeno della riflessione totale ha molte applicazioni. Una delle più comuni è costituita dai prismi ottici contenuti nei binocoli.



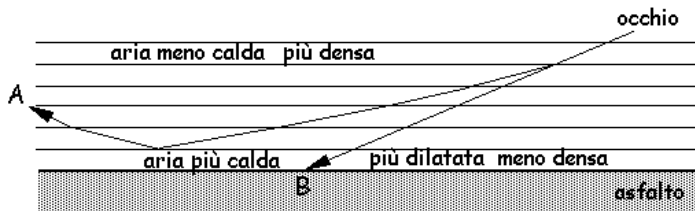
In tali strumenti i prismi vengono utilizzati per raddrizzare l'immagine (che nei comuni cannocchiali è capovolta) ed anche per limitare la lunghezza del

cannocchiale in quanto il cammino ottico diminuisce notevolmente a causa delle riflessioni avanti e indietro fra prismi contrapposti.

La riflessione totale viene sfruttata per esempio nelle **fibre ottiche**, che sono in sostanza semplici tubi di materiale molto trasparente.

I raggi luminosi che viaggiano al loro interno non riescono ad uscire dalle fibre ottiche (anche se questa subisce delle curvature non troppo strette) proprio grazie alla riflessione totale.

Una interessante conseguenza della riflessione totale si può notare anche nei cosiddetti **miraggi**.



Quando l'asfalto di una strada è molto caldo e l'aria è quasi ferma, si vengono a formare strati di aria a diversa temperatura.

Quella a diretto contatto con l'asfalto si riscalda maggiormente, quindi si dilata ed è meno densa di quella dello strato superiore.

Quindi è come se si avessero a contatto diversi mezzi trasparenti la cui densità diminuisce man mano che ci si allontana dal terreno.

I raggi luminosi subiscono allora la riflessione totale e l'osservatore (vedi figura) guardando nella direzione di B vede un oggetto (o il cielo) che si trova invece nella direzione di A.

Si ha quindi l'impressione che in B ci sia una pozza d'acqua che riflette il cielo.

I fenomeni ondulatori

La natura ci offre continuamente la visione di fenomeni ondulatori e dei loro effetti.

Le onde del mare, la luce, le onde radio, una corda che oscilla, il suono, il calore, e così via. Tutti questi fenomeni (e molti altri) sono governati da leggi identiche valide per ogni tipo di onda.

Vedremo che un'onda è in ogni caso **un insieme di moti armonici coordinati fra loro**.

Le onde possono essere classificate in due diversi tipi fondamentali: le onde **trasversali** e quelle **longitudinali**.



Sono trasversali quelle in cui le oscillazioni dei singoli moti armonici avvengono in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

È ciò che avviene per esempio alle onde sulla superficie di un liquido.

Basta pensare ad un tappo di sughero galleggiante: oscillerà su e giù con moto armonico, mentre l'onda si sposta lungo la superficie del liquido.

È importante notare che il tappo non viene trascinato dall'onda. Tutte le particelle di liquido oscillano come il tappo, in modo coordinato, con un leggero ritardo fra loro.



Sono invece longitudinali per esempio le onde prodotte lungo una molla.

Se immaginiamo di legare un piccolo filo di lana ad una spira della molla, lo vedremo oscillare con moto armonico verso destra e sinistra (vedi figura), nella stessa direzione di propagazione dell'onda.

Tutte le onde appartengono alla prima categoria o alla seconda.

Si chiama **periodo (T)** il tempo necessario perché un picco dell'onda (cioè una cresta dell'onda di liquido o un punto di compressione della molla) raggiunga quello successivo.

Si chiama invece **lunghezza d'onda (λ)** la distanza fra due picchi successivi.

La **velocità V** dell'onda è data da

$$V = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad (\text{dove } \nu \text{ è la frequenza})$$

Si chiama **fronte d'onda** l'insieme dei picchi in un certo istante.

Equazioni delle onde

Si abbia per esempio una corda fissata ad un estremo e su di essa si propaghi **un treno d'onde sinusoidali** (cioè un insieme continuo di onde aventi tutte le stesse caratteristiche).

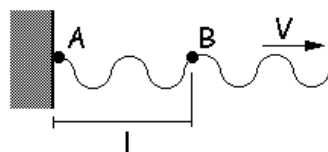
L'onda è di tipo longitudinale, ed avrà una velocità di propagazione V .

Prendiamo in considerazione due punti arbitrari A e B posti fra loro ad una distanza l (che non è, almeno necessariamente, la lunghezza d'onda λ).

Il moto armonico del punto A è dato in ogni istante dalla legge oraria

$$(1) \quad s = s_0 \sin \omega t$$

dove ω è la pulsazione del moto armonico.



Poiché la velocità di propagazione dell'onda è $V = \frac{\lambda}{T}$ o anche, più

genericamente $V = \frac{l}{t}$, si può affermare che il tempo necessario all'onda per

andare da A a B è $t = \frac{l}{V}$.

Quindi mentre il punto A ha la legge oraria (1), il punto B ha nello stesso istante una legge oraria simile ma "sfasata" (cioè anticipata) di un tempo $\frac{l}{V}$.

Quindi la legge oraria del punto B è

$$s = s_0 \text{sen} \omega \left(t - \frac{l}{V} \right)$$

La (2) rappresenta la legge oraria di un generico punto B in modo coordinato con quella del punto A. La (2) viene detta **equazione dell'onda**.

Ma poiché $V = \frac{\lambda}{T}$ la (2) si può anche scrivere sotto la forma

$$s = s_0 \text{sen} \omega \left(t - \frac{lT}{\lambda} \right)$$

o anche

$$s = s_0 \text{sen} \omega \left(t \frac{T}{T} - \frac{lT}{\lambda} \right)$$

$$s = s_0 \text{sen} \omega T \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right)$$

$$s = s_0 \text{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right)$$

(ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e quindi $\omega T = 2\pi$).

Le onde elettromagnetiche

Uno dei più importanti fenomeni ondulatori è quello costituito **dalle onde elettromagnetiche**.

Sotto questa denominazione si possono raggruppare una gran quantità di fenomeni che potrebbero sembrare estremamente diversi fra loro: La luce, il calore, le onde radio, le onde televisive, i raggi ultravioletti, i raggi gamma, i raggi X, e così via.

Anche se può sembrare strano, sono tutti aspetti diversi di uno stesso fenomeno: la propagazione delle onde elettromagnetiche.

I fenomeni suddetti non hanno bisogno di un mezzo per propagarsi nello spazio (nel vuoto hanno una velocità fissa denominata c e che corrisponde a circa 300 mila Km al secondo, mentre negli altri mezzi hanno una velocità di poco inferiore), e differiscono fra loro solo per la diversa lunghezza d'onda.



Nella figura si possono vedere come sono disposti al variare della lunghezza d'onda.

Solo in un ristretto intervallo si ha una "finestra" e le onde vengono percepite dai nostri occhi sotto forma di luce (il rosso per la lunghezza d'onda maggiore ed il violetto per quella minore; tutti gli altri colori hanno una lunghezza d'onda intermedia).

Lunghezze d'onda maggiore danno luogo a onde che non vengono percepite più dai nostri occhi, ma le percepiamo sotto forma di calore.

Onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda ancora maggiore non vengono più percepite dai nostri sensi, ma danno luogo a fenomeni molto importanti: le microonde, le onde radar e le onde radio.

Anche le lunghezze d'onda inferiori al violetto non vengono percepite dai nostri sensi, ma danno luogo ai raggi ultravioletti, ai raggi gamma, raggi X, etc.

Nella figura si possono notare due scale: quella rivolta a destra che mostra il verso di crescita delle lunghezze d'onda, e quella rivolta a sinistra che mostra invece il verso di crescita delle frequenze.

Infatti la lunghezza d'onda e la frequenza sono inversamente proporzionali fra loro.

La velocità della luce nel vuoto è

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

E poiché C è costante, quando λ aumenta v diminuisce e viceversa.

Una sorgente di luce tradizionale (il Sole, una lampadina, una candela...) emette una gran quantità di onde elettromagnetiche comprendenti tutte le lunghezze d'onda comprese fra il rosso e il violetto.

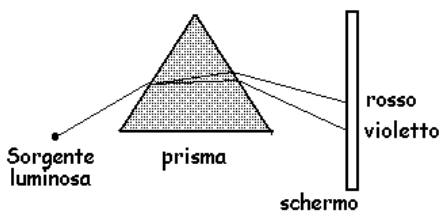
Quando il nostro occhio riceve contemporaneamente tutte le onde visibili sovrapposte, percepisce il colore bianco.

Lo dimostrò Newton colorando un disco di cartone con tutti i colori dell'arcobaleno e facendolo poi girare velocemente: l'occhio in questo caso vede sparire i colori ed ha la sensazione che il disco sia bianco.

La dispersione della luce

Un fascio di luce proveniente da una comune sorgente luminosa è costituito quindi da **luce bianca**, cioè dalla emissione simultanea di tutte le onde elettromagnetiche comprese fra il rosso ed il violetto (ogni colore ha una precisa lunghezza d'onda).

La separazione delle onde in base alla loro frequenza prende il nome di fenomeno della **dispersione**.



Il modo più semplice per ottenere la dispersione della luce è quello di far passare la luce attraverso un prisma di vetro (o di qualsiasi materiale trasparente).

Le onde elettromagnetiche vengono deviate in modo diverso a seconda

della loro lunghezza d'onda.

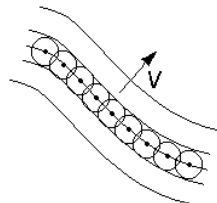
Un altro modo di ottenere la dispersione è quello di farla passare attraverso due fenditure molto piccole poste vicinissime fra loro.

Per rendere il fenomeno più marcato si possono usare più di due fenditure, addirittura una fila di fenditure equidistanti. Il dispositivo così formato prende il nome di **reticolo**.

Cerchiamo di capire perché due (o più) fenditure provocano la dispersione della luce.

Il principio di Huygens

Spesso si utilizza un comodo modello matematico inventato da Huygens: un fronte d'onda può sempre essere considerato come l'involuzione, l'insieme, di infinite onde emesse da sorgenti puntiformi in fase fra loro.

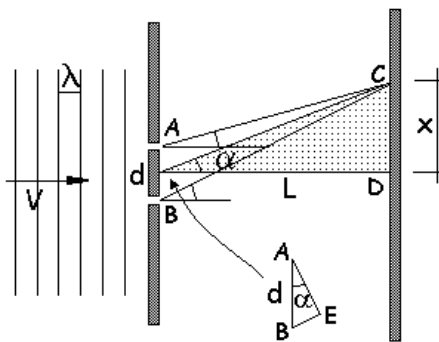


In altre parole l'insieme delle onde circolari (di uguale raggio) formano il fronte d'onda successivo, come mostrato in figura.

L'esperienza di Young

È una esperienza molto semplice da realizzare e permette di dimostrare che la luce è costituita da onde elettromagnetiche.

Si abbia un insieme di onde emesse da una sorgente di luce monocromatica (cioè con una sola lunghezza d'onda), talmente lontana da poter considerare i fronti d'onda come piani equidistanti.



Le onde luminose procedano con velocità V e abbiano una lunghezza d'onda λ .

Per il principio di Huygens l'ultimo fronte d'onda prima dello schermo con due forellini respinge tutte le onde emesse dalle sorgenti puntiformi, eccetto quelle due che si trovano proprio in corrispondenza degli stessi.

Dai forellini vengono quindi emesse onde luminose in tutte le direzioni che colpiranno successivamente un secondo schermo.

Consideriamo un generico punto C su tale schermo, a distanza x dal punto D . Per ipotesi stabiliamo che i forellini siano molto piccoli (rispetto alla lunghezza λ), che anche la distanza d sia sufficientemente piccola, e che infine la distanza L sia molto grande rispetto ad x e a d .

I due raggi luminosi considerati (AC e BC) percorrono distanze diverse, ma sono costituiti da onde perfettamente identiche fra loro, che sono partite dai due forellini nello stesso istante.

Ebbene, **se accade che la differenza di cammino BE fra i due raggi luminosi corrisponde esattamente ad un multiplo di lunghezza d'onda λ** , allora le due onde arrivano in fase nel punto C e rafforzano il loro effetto. Si ha in questo caso una **interferenza costruttiva**.

La condizione perché si realizzi l'interferenza costruttiva è quindi

$$BE = K\lambda = 2K \frac{\lambda}{2}$$

che si può esprimere anche nel modo seguente ($2K$ è un numero certamente pari): **la differenza di cammino deve corrispondere ad un multiplo pari di mezza lunghezze d'onda.**

Se invece **la differenza di cammino corrisponde ad un numero dispari di mezza lunghezze d'onda**, le due onde arrivano in C in opposizione di fase, cioè quando una si trova ad un massimo, l'altra si trova ad un minimo.

Questa volta l'effetto risultante è di annullamento e **l'interferenza si dice distruttiva.**

La condizione perché si realizzi l'interferenza distruttiva è allora

$$BE = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}$$

(Infatti se $2K$ è un numero pari, $2K+1$ è sicuramente dispari).

Sul secondo schermo si osserverà allora una serie di puntini luminosi (dovuti all'interferenza costruttiva) e di puntini bui (dovuti all'interferenza distruttiva).

Si può calcolare la distanza x fra i puntini luminosi nel modo seguente:

$$\text{sen } \alpha = \frac{BE}{BA}$$

$$BE = d \text{sen } \alpha$$

ma è anche

$$BE = K\lambda$$

Risulta allora

$$d \text{sen } \alpha = K\lambda$$

Ma nel triangolo ombreggiato (vedi figura precedente), possiamo porre

$$\tan \alpha = \frac{x}{L} \cong \text{sen } \alpha$$

(perché l'angolo α è molto piccolo). Sostituendo si ottiene infine

$$d \frac{x}{L} = K\lambda$$

$$x = \frac{K\lambda L}{d}$$

Si noti che la distanza x è inversamente proporzionale a d : più sono vicini i due forellini e maggiore è la distanza fra i punti di interferenza costruttiva.

Invece è direttamente proporzionale a λ : aumentando λ aumenta anche x .

L'esperienza di Young è cruciale per dimostrare la natura ondulatoria della luce: **solo i fenomeni ondulatori possono dar luogo all'interferenza.**

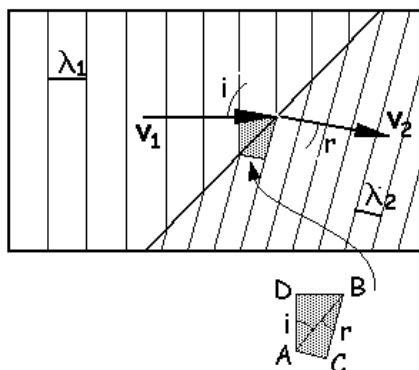
Costituì infatti un argomento fondamentale per coloro che sostenevano la natura ondulatoria della luce (contro i sostenitori della teoria corpuscolare).

Notiamo infine una cosa molto importante: se invece di luce monocromatica viene impiegata luce bianca, ogni lunghezza d'onda λ (e quindi ogni colore), ha punti diversi di interferenza costruttiva. Quindi sullo schermo si avrà la dispersione, la separazione dei vari colori dell'arcobaleno.

Se invece di due fenditure si ha una serie di fenditure equidistanti, i punti di interferenza costruttiva si sovrappongono, si rinforzano ed il fenomeno risulta molto più marcato. Un tale dispositivo prende il nome di **reticolo** e si chiama **passo** del reticolo il numero di fenditure ogni millimetro.

Oltre che con il prisma è quindi possibile realizzare la dispersione della luce anche con il reticolo.

2^a legge della rifrazione con la teoria ondulatoria



Abbiamo visto in precedenza che la teoria corpuscolare non riesce a spiegare correttamente la seconda legge della rifrazione, ma giunge anzi a risultati opposti a quelli riscontrabili sperimentalmente.

L'ottica ondulatoria invece riesce ad interpretarli esattamente.

Prendiamo in considerazione una vaschetta entro cui è posta dell'acqua. Una barretta oscillante genera un treno di onde piane aventi tutte la stessa lunghezza d'onda λ_1 e procedenti verso destra (vedi figura) con velocità v_1 .

Sul fondo della vaschetta, a destra della figura, è posto uno spessore (per esempio di vetro) che si deposita sul fondo ed ha un lato che attraversa obliquamente la vaschetta.

Sopra tale spessore il livello del liquido è minore e la velocità delle onde diminuisce da v_1 a v_2 (con $v_1 > v_2$).

Come conseguenza i fronti d'onda si inclinano e la lunghezza d'onda λ_2 diminuisce.

Si può vedere ora l'analogia fra il fenomeno descritto e la rifrazione della luce: nella figura si vede bene qual è la linea di separazione fra i due mezzi, la normale, la direzione del raggio incidente e di quello rifratto, e gli angoli di incidenza e di rifrazione.

Il raggio si avvicina alla normale e questa volta la velocità v_2 è minore della v_1 . Osserviamo il particolare ingrandito nella parte inferiore della figura. Si ha

$$seni = \frac{\lambda_1}{AB}$$

$$senr = \frac{\lambda_2}{AB}$$

e perciò

$$\frac{seni}{senr} = \frac{\frac{\lambda_1}{AB}}{\frac{\lambda_2}{AB}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

La velocità di propagazione di un'onda è $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$ dove ν è la frequenza o anche il numero di fronti d'onda che passano ogni secondo. Tale numero è lo stesso sia nella zona in cui l'onda procede con velocità v_1 che nella zona in cui procede a velocità v_2 .

Quindi nelle due zone si ha rispettivamente

$$\begin{cases} v_1 = \lambda_1\nu \\ v_2 = \lambda_2\nu \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} \\ \lambda_2 = \frac{v_2}{\nu} \end{cases}$$

e sostituendo si ottiene infine

$$\frac{seni}{senr} = \frac{\frac{v_1}{\nu}}{\frac{v_2}{\nu}} = \frac{v_1}{v_2}$$

che questa volta è corretta perché $v_2 < v_1$.

ACUSTICA

Il suono

Si propaga nell'aria o in un altro mezzo, con onde longitudinali. Se poniamo vicino ad una sorgente sonora una piccola piuma galleggiante nell'aria, è possibile constatare che le oscillazioni della piuma (e quindi i moti armonici) avvengono nella stessa direzione di propagazione dell'onda, come avveniva nell'esempio della molla.

In altre parole l'aria subisce delle contrazioni ed espansioni che gradualmente si allontanano dalla sorgente.

Il suono ha bisogno di un mezzo: **nel vuoto il suono non può propagarsi**.

Ogni oggetto vibrante trasmette le sue vibrazioni al mezzo circostante, se la frequenza di queste vibrazioni è compresa fra 50 Hz e 12.000 Hz il nostro orecchio le percepisce sotto forma di suono. Per frequenze maggiori si hanno gli **ultrasuoni** (che entro certi limiti sono avvertiti dalle orecchie più sensibili di molti animali).

La velocità del suono nell'aria è di 340 m/s (nell'acqua è di 1500 m/s e nell'acciaio di 5000 m/s).

I suoni sono caratterizzati da tre attributi fondamentali:

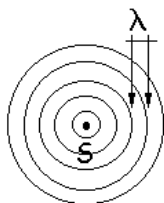
- 1) **L'altezza**, cioè la frequenza dell'onda: ad una frequenza maggiore corrisponde un suono più acuto.
- 2) **L'intensità**, cioè l'ampiezza dell'onda, l'energia ad essa collegata. Un suono più intenso arriverà più lontano.
- 3) **Il timbro**, cioè la forma dell'onda. Anche se due strumenti musicali emettono la stessa nota, sono chiaramente riconoscibili perché l'onda non è sinusoidale ma ha una forma caratteristica diversa per ogni sorgente sonora.

Quando emettiamo un suono, questo urta un ostacolo e torna indietro, se l'ostacolo si trova ad almeno 17 metri da noi, percorre in tutto $17+17 = 34$ metri.

Il suono impiega un decimo di secondo per percorrere tale lunghezza, e un decimo di secondo è il tempo necessario per emettere una sillaba.

Se quindi pronunciamo ad alta voce una parola, questa ci torna indietro con un ritardo di un decimo di secondo ed avvertiremo il fenomeno dell'**eco** (che in questo caso sarà monosillabica).

L'effetto Doppler

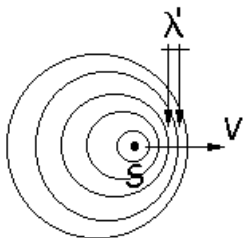


Si abbia una sorgente S che emette un'onda (di qualsiasi tipo: sonora, luminosa, elettromagnetica in genere, ecc) con lunghezza d'onda λ e velocità v .

Le onde si propagano con fronti d'onda sferici concentrici.

Un osservatore posto in A riceverà l'onda con una lunghezza λ invariata.

Ma se la sorgente S si muove verso A con una velocità V (attenzione a non confondere la velocità v di propagazione dell'onda nel mezzo, con la velocità V con cui si muove la sorgente), le onde circolari vengono emesse da punti differenti perché la sorgente è in movimento, e l'effetto finale sarà quello di onde sferiche che non sono più concentriche, ma disposte come nella figura.



L'osservatore in A percepirà ora onde di lunghezza $\lambda' < \lambda$.

Si può affermare che λ corrisponde a λ' più lo spazio percorso dalla sorgente S in un periodo, cioè

$$V = \frac{s}{T}$$

$$s = VT$$

ma è anche

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

e sostituendo, si ha

$$s = \frac{V}{v} \lambda$$

Quindi possiamo scrivere

$$\lambda = \lambda' + \frac{V}{v} \lambda$$

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{V}{v} \right)$$

Al contrario, se la sorgente si allontana da A con velocità V, si ottiene in modo perfettamente analogo

$$\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{V}{v} \right)$$

L'effetto Doppler è un fenomeno molto importante. Nel caso del suono, per esempio, ci fa sentire più acuto un suono emesso da una sorgente che si sta avvicinando rispetto a quello che percepiremmo se la sorgente fosse ferma. Al contrario il suono sarà più grave se la sorgente S si sta allontanando da noi.

È in altre parole la differenza di frequenza che percepiamo chiaramente quando per esempio la sirena di un'ambulanza si sta allontanando o avvicinando.

Nel caso delle onde elettromagnetiche (della luce, per esempio). L'effetto Doppler ci permette di stabilire se determinate stelle o galassie si stanno allontanando da noi ed a quale velocità.

L'effetto Doppler può anche essere sfruttato nella diagnostica medica per determinare per esempio la velocità del sangue nelle vene e nelle arterie.

E così via.

I battimenti

Si abbiano due onde (di qualunque natura) che si sovrappongono.

Abbiamo visto che se hanno la stessa frequenza si verifica il fenomeno dell'interferenza costruttiva o distruttiva.

Ma cosa avviene se le frequenze sono leggermente differenti fra loro ?

Si abbiano le due onde

$$\begin{cases} y_1 = y_0 \text{sen} \omega_1 \left(x - \frac{l}{v} \right) \\ y_2 = y_0 \text{sen} \omega_2 \left(x - \frac{l}{v} \right) \end{cases}$$

Quando queste due onde interferiscono fra loro si ha un'onda risultante

$$y = y_1 + y_2 = y_0 \text{sen} \omega_1 \left(x - \frac{l}{v} \right) + y_0 \text{sen} \omega_2 \left(x - \frac{l}{v} \right)$$

$$y = y_0 \left[\text{sen} \omega_1 \left(x - \frac{l}{v} \right) + \text{sen} \omega_2 \left(x - \frac{l}{v} \right) \right]$$

Applicando le formule di prostaferesi, si ha

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{con}$$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{\omega_1 x - \omega_1 \frac{l}{v} + \omega_2 x - \omega_2 \frac{l}{v}}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \left(x - \frac{l}{v}\right)$$

$$\frac{p-q}{2} = \frac{\omega_1 x - \omega_1 \frac{l}{v} - \omega_2 x + \omega_2 \frac{l}{v}}{2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \left(x - \frac{l}{v}\right)$$

e, sostituendo,

$$y = 2y_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \left(x - \frac{l}{v}\right) \right] \text{sen} \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \left(x - \frac{l}{v}\right) \right]$$

Il risultato è ancora un'onda, un segnale sinusoidale la cui ampiezza è

$$y = 2y_0 \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \left(x - \frac{l}{v}\right) \right]$$

che è **variabile**, e non costante.

Trascurando il termine $\frac{l}{v}$ che influisce solo sullo sfasamento, si può osservare

che il segnale risultante ha un massimo quando

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x = K\pi$$

$$(\omega_1 - \omega_2)x = 2K\pi \quad \text{ma è } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

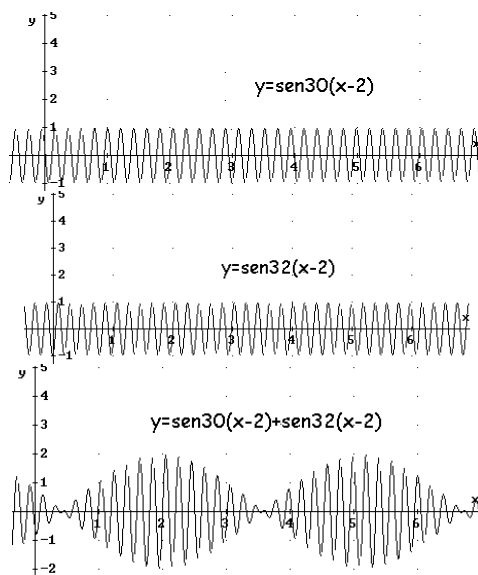
$$2\pi(\nu_1 - \nu_2)x = 2K\pi$$

$$(\nu_1 - \nu_2)x = K$$

$$x = \frac{K}{\nu_1 - \nu_2}$$

Per $K = 1, 2, 3, \dots$ si hanno dei **ventri**, mentre nei punti intermedi si hanno dei **nodi**.

Per esempio dalle due onde sinusoidali con ampiezza costante, rappresentate nelle figure, e con pulsazioni leggermente diverse ($\omega_1 = 30$ $\omega_2 = 32$) e componendole si ha come risultato l'onda modulata con ventri e nodi mostrata nella terza figura.



Questo fenomeno prende il nome di **battimento**.

La risonanza

Ogni sistema rigido ha una propria frequenza di vibrazione. Per esempio il telaio di una moto, di un'auto, ecc.

Indichiamo con ω_0 tale frequenza che chiameremo appunto **frequenza propria** di vibrazione del corpo rigido.

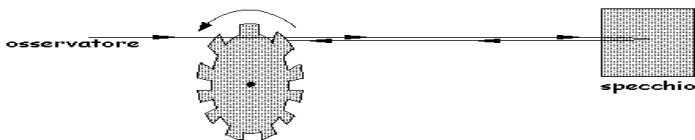
Se collegato con il corpo (o nelle sue immediate vicinanze) poniamo una sorgente di vibrazioni che abbia la stessa frequenza ω_0 di quella propria del corpo, avviene gradualmente un trasferimento di energia dalla sorgente al corpo, e questo comincia a vibrare con ampiezza sempre maggiore e può arrivare perfino a distruggersi. Si dice che **il corpo entra in risonanza**.

È noto per esempio che alcuni cantanti riescono a rompere un bicchiere di cristallo semplicemente emettendo un prolungato acuto nelle vicinanze del bicchiere. Debbono ovviamente modulare la propria voce fino ad arrivare alla frequenza propria di vibrazione del bicchiere.

È della stessa natura il fenomeno in base al quale talvolta il telaio di un'auto o di una moto comincia a vibrare fortemente quando ha un basso regime di giri.

La velocità della luce

È una delle costanti universali e rappresenta la massima velocità raggiungibile. Per misurarla descriviamo il metodo adoperato da Fizeau nel 1849.



Si abbia una ruota dentata (con n denti e perciò con $2n$ spazi vuoti e pieni alternati), e poniamola in rotazione a velocità crescente avendo la possibilità di conoscere in ogni istante la velocità angolare ω con cui essa ruota.

Ad una distanza d (sufficientemente grande, per esempio alcuni chilometri) poniamo uno specchio.

Come si può vedere nella figura la luce viene riflessa dallo specchio e torna indietro riuscendo a passare nello stesso spazio vuoto entro cui era passata nel percorso di andata.

Aumentando la velocità di rotazione del disco, ad un certo punto il raggio riflesso non riuscirà più a passare ed incontrerà lo spazio pieno, il dente successivo. Quando ciò si verifica occorre leggere la velocità angolare ω .

Indicando con Δt il tempo necessario al passaggio di un dente, ricordando che gli spazi vuoti e pieni sono in tutto $2n$, si ha che il periodo T necessario ad una rotazione completa del disco è

$$T = 2n\Delta t$$

ma è $\varpi = \frac{2\pi}{T}$ e quindi $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Sostituendo si ha

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2n\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{n\omega}$$

Ma d'altra parte, se il raggio luminoso tornando indietro (e quindi dopo aver percorso una lunghezza $2d$) incontra uno spazio pieno invece di quello vuoto, nello stesso tempo Δt e alla velocità incognita c , possiamo scrivere

$$c = \frac{2d}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$

Uguagliando fra loro le due relazioni che esprimono Δt , si ha

$$\frac{\pi}{n\omega} = \frac{2d}{c}$$
$$c = \frac{2dn\omega}{\pi}$$

Facendo i calcoli si trova $c = 300.000$ Km/secondo (circa).

Lo sviluppo in serie di Fourier

È un metodo matematico con il quale è possibile rappresentare una funzione periodica come somma di un numero infinito di termini ciascuno costituito da una opportuna onda sinusoidale (detta armonica).

Solo tutti gli infiniti termini restituiscono però la funzione desiderata: se ci si limita ad un limitato numero di termini si avrà una funzione via via più approssimata.

Data dunque una **funzione periodica** $y = f(x)$ supponiamo che:

- Essa sia continua (o con un numero finito di discontinuità di 3 specie (cioè punti in cui il limite destro e sinistro esistono finiti, ma sono diversi)).
- Sia finito o nullo il numero di punti in cui la funzione non sia derivabile (ma esistono derivata destra e sinistra).
- Sia finito il numero di punti in cui la derivata prima non sia continua.

Il teorema di Fourier afferma che con tali ipotesi la funzione può essere trasformata nella serie infinita di termini :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \text{sen}(nx) + b_n \text{cos}(nx)]$$

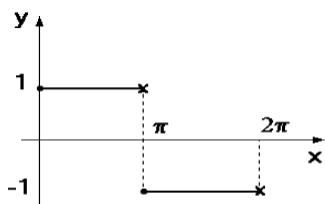
in cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{cos}(nx) dx$$

L'onda quadra



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Cominciamo a prendere in considerazione un'onda caratteristica molto semplice, denominata onda quadra.

La curva può essere rappresentata graficamente come nella figura a sinistra

Il calcolo dei coefficienti è molto semplice e può essere sviluppato con semplici integrazioni.

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) dx \right\} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sin(nx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nx) dx \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{(se } n \text{ e' pari)} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{(se } n \text{ e' dispari)} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

Quindi l'onda quadra può essere rappresentata dalla funzione

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \frac{4}{5\pi} \sin 5x + \dots = \dots$$

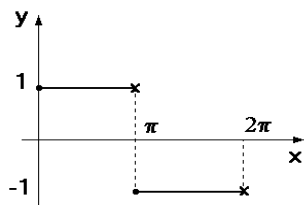
La funzione nel secondo membro corrisponderà alla $f(x)$ con una precisione tanto maggiore quanto più alto è il numero dei termini presi in considerazione.

In altre parole, come vedremo in seguito adoperando un programma in basic, un grafico ottenuto tenendo conto dei primi tre termini dello sviluppo, fornisce una funzione che approssima abbastanza bene un'onda quadra, mentre se prendessimo in considerazione tutti gli infiniti termini dello sviluppo, avremmo la riproduzione esatta dell'onda quadra.

L'onda a dente di sega

Prendiamo ora in considerazione l'onda a dente di sega (vedi figura).

Con un procedimento analogo al precedente, si ricava



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 2(-1)^n + \frac{1}{n}$$

$$b_n = 0$$

cioè

$$f(x) = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{1}{3n} \sin 3x - \dots$$

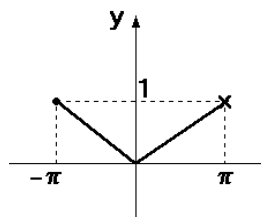
L'onda triangolare

Per l'onda triangolare, in modo analogo si ha

$$a_0 = \pi$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (\text{se } n \text{ e' pari}) \\ \frac{4}{\pi n^2} & (\text{se } n \text{ e' dispari}) \end{cases}$$



cioè

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x - \frac{4}{25\pi} \cos 5x - \dots$$

Alcune considerazioni grafiche

Può risultare utile tenere presenti le seguenti considerazioni:

- ✓ Se il valore medio di $f(x)$ è nullo, allora il termine $\frac{a_0}{2}$ è assente.
- ✓ Se $f(x)$ è una curva periodica di periodo T , si hanno solo le armoniche dispari perché per esse è verificata la condizione

$$f(t + T/2) = -f(t)$$

cioè la curva assume ordinata opposta dopo un semiperiodo.

- ✓ Se $f(x)$ è simmetrica rispetto all'asse y allora deve essere verificata la condizione

$$f(t) = f(-t)$$

e quindi devono mancare i termini in seno, per i quali si ha invece

$$\sin t = -\sin(-t)$$

- ✓ Se $f(x)$ è simmetrica rispetto all'origine deve essere verificata la condizione

$$f(t) = -f(-t)$$

e perciò devono mancare i termini in coseno, per i quali si ha invece

$$\cos t = \cos(-t)$$

TERMOLOGIA

Gli stati di aggregazione della materia

La materia esiste in tre stati di aggregazione: solido, liquido e gassoso.



Le particelle che costituiscono la materia sono in continua agitazione che cresce se questa viene riscaldata.

A basse temperature (si pensi per esempio all'acqua) le sostanze sono solide (ghiaccio) e le particelle sono molto ravvicinate e legate fra loro.

Aumentando la temperatura le particelle si agitano maggiormente, aumentano le loro distanze reciproche, sono meno legate fra loro e la materia diventa liquida (acqua).

Aumentando ancora la temperatura le mutue distanze aumentano ulteriormente, i legami fra le particelle diminuiscono fino quasi ad annullarsi, e la sostanza diventa un gas (vapore).

Le trasformazioni hanno un nome caratteristico (vedi figura) e nel caso in cui passano direttamente dallo stato solido a quello aeriforme (o viceversa), come la naftalina per esempio, la trasformazione si chiama sublimazione.

Durante un cambiamento di stato la temperatura rimane rigorosamente costante.

Così, per esempio, se un recipiente messo su un fornello contiene acqua bollente, la sua temperatura rimane assolutamente costante fino a quando tutta l'acqua in esso contenuta non si è trasformata in vapore.

Calore e temperatura

Spesso si attribuisce a questi due termini lo stesso significato. Invece il calore e la temperatura sono due grandezze collegate fra loro, ma nettamente diverse.

Per fare un paragone, è come se confondessimo **il livello** del liquido in due recipienti con **la quantità** di liquido contenuto in ciascuno dei due.

Posso avere due recipienti con la stessa quantità di liquido, ma con livelli differenti (o viceversa).

Certamente se verso altro liquido in uno di essi, aumentano sia la quantità di liquido che il livello, ma i due concetti pur legati fra loro sono diversi.

Allo stesso modo posso fornire a due corpi una stessa quantità di calore, ma questi subiscono aumenti diversi di temperatura.

Cosa sono però il calore e la temperatura ?

Abbiamo accennato al fatto che le particelle di un corpo sono in continuo movimento, e che scaldando il corpo aumenta il loro movimento.

Ebbene, **la quantità di calore posseduta da un corpo è la somma delle energie cinetiche** delle sue particelle.

La temperatura invece è proporzionale alla loro energia cinetica media.

Chiaramente queste definizioni sono del tutto teoriche e non ci permettono di calcolare la quantità di calore o la temperatura di un corpo a causa della impossibilità materiale di determinare l'energia totale delle particelle o la loro energia media.

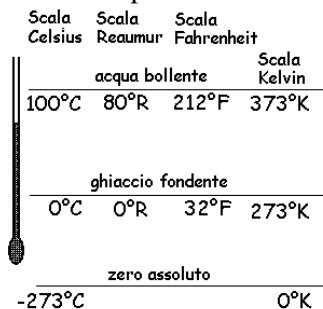
Occorre servirsi della misura di una grandezza indiretta. Cominciamo con la temperatura.

Scale termometriche

Osservando che riscaldando ogni sostanza questa aumenta di volume (fa eccezione l'acqua nell'intervallo compreso fra 0 e 4 gradi centigradi), si può prendere con buona approssimazione l'aumento di volume causato dal riscaldamento di un liquido (mercurio o alcool colorato), come indice per misurare la temperatura.

Inoltre sappiamo che durante un cambiamento di stato la temperatura di un corpo rimane costante.

Ebbene, possiamo realizzare un termometro servendoci di un piccolo bulbo di vetro contenente mercurio, collegato con un tubicino molto sottile (capillare), che trasforma anche un piccolo aumento di volume in un aumento facilmente visibile di livello del mercurio nel capillare.



Per tarare il termometro basta porre il bulbo in un recipiente con ghiaccio fondente.

Segniamo su una scala il livello raggiunto, e questo costituisce un primo riferimento della scala.

Poi poniamo il bulbo nell'acqua bollente, segniamo il nuovo livello, e avremo anche un secondo punto di riferimento.

A seconda del valore che assegniamo a questi due livelli, avremo le varie scale termometriche.

La scala Celsius viene anche detta centigrada ed è quella più diffusa. La Reaumur veniva usata in Francia ed ora è in disuso.

La Fahrenheit è usata invece nei paesi di lingua anglosassone.

Osservando che la temperatura ha un limite inferiore dovuto al fatto che man mano che il suo valore diminuisce le particelle rallentano il loro movimento, ma ad un certo punto si fermano e non ha significato parlare di temperature più basse.

Questo limite si presenta a -273°C (circa), ed è un limite che non può essere superato, ma neanche raggiunto.

Questa temperatura viene detta **zero assoluto**.

Non esistono invece limiti per le alte temperature.

È stata creata allora una quarta scala termometrica, usata a livello scientifico, detta scala assoluta o di Kelvin, semplicemente spostando la scala centigrada verso il basso come mostrato in figura.

In questo modo si sono eliminate le temperature negative.

Per convenzione la temperatura centigrada si indica con la t minuscola, mentre quella assoluta con la T maiuscola.

Chiaramente si ha $T = t + 273$.

La quantità di calore

La quantità di calore unitaria (nel sistema c.g.s.) è la caloria ed è fissata convenzionalmente come la quantità di calore necessaria per innalzare da $14,5^{\circ}\text{C}$ a $15,5^{\circ}\text{C}$ un grammo di acqua distillata.

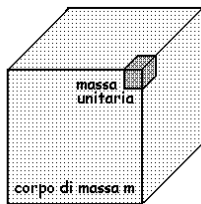
Se invece di un grammo consideriamo un kilogrammo, si ha l'unità di misura del S.I. che prende il nome di grande caloria (o Caloria con l'iniziale maiuscola).

Chiaramente occorrono 1000 calorie per costituire una Caloria.

Non basta dire che la temperatura deve innalzarsi di un grado, ma occorre precisare il punto iniziale ($14,5^{\circ}\text{C}$), perché ci sono piccole differenze fra la quantità di calore per necessaria per innalzare la temperatura da 15°C a 16°C oppure da 50°C a 51°C .

La differenza è minima, ma nella definizione di una unità di misura occorre essere estremamente precisi.

Calore specifico e capacità termica



Si abbia un corpo di massa m e si voglia innalzare di un grado centigrado la sua temperatura.

In questo caso, non trattandosi di una unità di misura, tralasciamo di precisare quale sia la temperatura iniziale. L'aumento di temperatura è proporzionale alla quantità di calore fornita, e la costante di proporzionalità è caratteristica di ogni sostanza.

Essa prende il nome di **capacità termica**.

Si può affermare allora che

$$\Delta Q = C \Delta t$$

Se invece di tutto il corpo consideriamo solo 1 Kg di esso, si ha il **calore specifico**.

Questo quindi è la quantità di calore necessaria per innalzare di un grado centigrado 1 Kg di una sostanza.

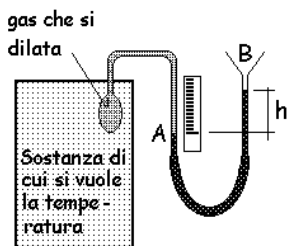
Basta dunque moltiplicare il calore specifico per la massa, per ottenere la capacità termica.

La formula precedente può allora essere scritta anche nella forma seguente

$$\Delta Q = mC_s \Delta t$$

Dove il C_s è il calore specifico.

Termometri a gas



Sono molto più precisi di quelli a liquido perché per i gas la corrispondenza fra aumento di pressione (o di volume) e aumento di temperatura è rigorosamente lineare.

Cioè se manteniamo costante il volume del gas, allora si ha una corrispondenza del tipo

$$(1) \quad P = at + b$$

Con a e b costanti da determinare.

Realizziamo un termometro a gas a volume costante, nel modo seguente.

Il bulbo contiene un gas, questo scaldandosi si dilata.

Nel tubo flessibile ad U c'è un liquido colorato che ha solo le funzioni di indicatore (quindi non è necessario che sia un capillare).

Il gas scaldandosi si dilata e spinge il liquido indicatore verso il basso: si forma nei due rami della U un dislivello h che è possibile misurare.

Alzando o abbassando l'imbuto B si deve fare in modo che il livello A si trovi sempre allo stesso punto. In questo modo il volume del gas rimane costante.

Ora per tarare il termometro poniamo nel recipiente rettangolare prima del ghiaccio fondente (e indichiamo con p_0 la pressione del gas). Poi mettiamo nel recipiente dell'acqua bollente (e indichiamo con p_{100} la pressione del gas). Si ottiene, sostituendo $t=0$ e $t=100$ nella (1),

$$p_0 = b$$

$$p_{100} = 100 a + p_0$$

cioè

$$b = p_0$$

$$a = (p_{100} - p_0)/100$$

Sostituiamo ancora nella (1)

$$p = \frac{p_{100} - p_0}{100} t + p_0$$

$$p = \left(\frac{p_{100}}{100} - \frac{p_0}{100} \right) t + p_0$$

$$p = \frac{p_0}{100} \left(\frac{p_{100}}{p_0} - 1 \right) t + p_0$$

Ebbene, per tutti i gas il rapporto $\frac{p_{100}}{p_0}$ ha sempre lo stesso valore = 1,366.

La parentesi vale allora $1,366 - 1 = 0,366 = 1/2,732$.

Si ha quindi

$$p = \frac{p_0}{100} \frac{1}{2,73} t + p_0$$

$$p = \frac{p_0}{273} t + p_0$$

$$p = p_0 \left(\frac{t}{273} + 1 \right)$$

che viene detta anche legge di Gay-Lussac per la pressione.

La relazione fra pressione e temperatura è quindi lineare. Resta il problema di misurare la p per ottenere dalla legge di Gay-Lussac la temperatura.

La pressione corrisponde a quella esercitata dalla colonnina di liquido indicatore:

$$p = \frac{mg}{s} = \frac{mg}{s} \frac{h}{h} = \frac{mg}{V} h = \frac{m}{V} gh = \delta gh = P_s h$$

dove s è la sezione della colonnina, h la sua altezza, V il suo volume e P_s il peso specifico del liquido indicatore.

Dunque conoscendo P_s , leggendo h , si ottiene p . Sostituendo p nella formula di Gay-Lussac si ha infine la temperatura del gas e quindi della sostanza nel recipiente.

Dilatazione dei solidi

Per i gas a volume costante vale la formula $p = p_0(1 + \alpha t)$ dove $\alpha = \frac{1}{273}$

per tutti i gas.

Se invece manteniamo costante la pressione al variare della temperatura, si ha la seconda legge di Gay-Lussac per i volumi, strutturalmente identica a quella per la pressione:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{1}{273}$$

Per i solidi e per i liquidi valgono formule analoghe, ma la costante α prende il nome di **coefficiente di dilatazione** λ ed è diversa per ogni sostanza.

Si abbia una barretta costituita da una sostanza solida. Possiamo limitarci a considerare il suo allungamento all'aumentare della temperatura, perché le altre dimensioni sono trascurabili rispetto alla sua lunghezza.

Scaldandola, il suo allungamento è proporzionale sia alle dimensioni iniziali della sbarretta che all'aumento di temperatura.

$$\Delta l = \lambda l_0 t$$

dove λ è il **coefficiente di dilatazione lineare**, e l_0 la lunghezza iniziale (a 0°C).

Sviluppando si può scrivere:

$$l - l_0 = \lambda l_0 t$$

$$l = l_0(1 + \lambda t)$$

formalmente identica alle leggi di Gay-Lussac.

Nel caso di un solido avente due dimensioni più grandi della terza (per esempio una lastra metallica), l'aumento di superficie a causa dell'aumento di temperatura si può ricavare tenendo conto di due dilatazioni lineari (una secondo l'asse x e l'altra secondo l'asse y).

$$x = x_0(1 + \lambda t)$$

$$y = y_0(1 + \lambda t) \quad \text{e, moltiplicando membro a membro,}$$

$$S = S_0(1 + \lambda t)^2$$

$$S = S_0(1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2)$$

poiché λ è un numero molto piccolo, λ^2 è un numero assolutamente trascurabile e quindi il termine $\lambda^2 t^2$ può essere eliminato.

Si ha dunque

$$S = S_0(1 + 2\lambda t)$$

Il coefficiente di dilatazione superficiale è il doppio del coefficiente di dilatazione lineare.

Allo stesso modo con la dilatazione volumetrica si ha

$$S_z = S_0 z_0 (1 + 2\lambda t)(1 + \lambda t)$$

$$V = V_0 (1 + \lambda t + 2\lambda t + 2\lambda^2 t^2)$$

anche qui tralasciando il termine $2\lambda^2 t^2$ si ha

$$V = V_0 (1 + 3\lambda t)$$

Il coefficiente di dilatazione volumetrico è il triplo del coefficiente di dilatazione lineare: è la stessa formula incontrata per i gas, ma con la differenza che il coefficiente di dilatazione volumetrica per i solidi e i liquidi varia da sostanza a sostanza, mentre il coefficiente di dilatazione volumetrica per i gas ha sempre lo stesso valore pari a $1/273$.

Inoltre per i liquidi occorre distinguere fra **dilatazione apparente** e **reale**. Infatti poiché i liquidi devono essere contenuti in un recipiente, nella dilatazione occorre tener conto anche della dilatazione subita dal recipiente in seguito all'innalzamento della temperatura.

Leggi dei gas e trasformazioni tipiche

Le condizioni di ogni gas dipendono da tre fattori: il volume, la pressione e la temperatura.

È difficile stabilire in modo chiaro le relazioni che intercorrono nel modo di variare di questi tre parametri.

Si preferisce allora spesso mantenere fisso uno di essi, variarne un altro e capire come varia corrispondentemente l'ultimo parametro.

1. Se si mantiene fissa la pressione si ha una trasformazione **isobara** e al variare della temperatura il volume segue la prima legge di Gay-Lussac

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

2. Se si mantiene costante il volume si ha una trasformazione **isocora** e al variare della temperatura la pressione segue la **seconda legge di Gay-Lussac**

$$P = P_0(1 + \alpha t)$$

- Se si mantiene costante la temperatura si ha una trasformazione **isoterma** e al variare del volume la pressione varia seguendo la **legge di Boyle-Mariotte**

$$PV = \text{costante}$$

- Conviene a questo punto fare un cenno anche ad un quarto tipo di trasformazione caratterizzata dal fatto che avviene senza scambio di calore con l'esterno: la trasformazione **adiabatica**. In essa è $\Delta Q = 0$.

Nella rappresentazione grafica le prime due leggi corrispondono a delle rette, mentre la terza è un ramo di iperbole equilatera.

Queste leggi valgono solo per un **gas perfetto**, cioè per un gas in cui le molecole sono perfettamente libere fra loro e sono talmente piccole che non si urtano mai fra loro (ma urtano soltanto le pareti del recipiente che le contiene). Un gas reale si avvicina a queste condizioni se è sufficientemente rarefatto e in genere un gas a pressione e temperatura ambiente si trova in tali condizioni.

Definiamo inoltre **reversibile** una trasformazione in cui tutte le particelle seguono la stessa trasformazione nello stesso istante.

È una trasformazione impossibile a realizzare in pratica, ma ci si avvicina sufficientemente se immaginiamo di eseguire la trasformazione **molto lentamente**.

In caso contrario la trasformazione si dice **irreversibile**, nel senso che se si esegue la trasformazione inversa il gas non torna mai esattamente nelle stesse condizioni iniziali.

Equazione caratteristica dei gas

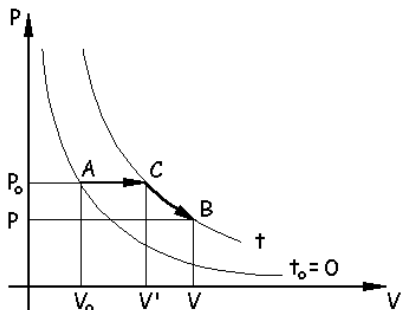
Sia data una mole di gas perfetto con parametri

$$A \equiv (P_0; V_0; t_0) \quad \text{con } t_0 = 0$$

cioè per esempio con pressione e volume ambiente e temperatura di 0°C .

Ora portiamo il gas ad uno stato B arbitrario con parametri

$$B \equiv (P; V; t)$$



Possiamo portare il gas dallo stato A allo stato B con una serie infinita di trasformazioni differenti.

Seguiamo invece, per nostra comodità, le due trasformazioni AC e AB (la prima isobara e la seconda isoterma) come indicato nella figura.

Riscaldiamo lentamente il gas (mantenendo costante la sua pressione, per esempio il gas sia contenuto in un

cilindro e lasciamo che il pistone sia libero di muoversi: la pressione del gas sarà sempre uguale alla pressione atmosferica esterna) finì a raggiungere la temperatura t del punto B.

Il volume aumenta fino a raggiungere il volume V' . Il gas si trova ora nello stato C con parametri $(P_0; V'; t)$.

La trasformazione isobara AC, per la prima legge di Gay-Lussac, è rappresentata dalla relazione

$$V' = V_0(1 + \alpha t)$$

Raggiunta la temperatura t eseguo ora una trasformazione isoterma continuando a espandere lentamente il gas fino a quando la sua pressione non raggiunge il valore P del punto B.

La trasformazione è isoterma e, per la legge di Boyle-Mariotte, possiamo scrivere

$$P_0 V' = PV = \text{costante}$$

Sostituendo V' in questa relazione, si ha

$$P_0 [V_0(1 + \alpha t)] = PV \quad \text{scambiamo i membri}$$

$$PV = P_0 V_0 (1 + \alpha t) \quad \text{ma è } \alpha = \frac{1}{273}$$

$$PV = P_0 V_0 \frac{273 + t}{273} \quad \text{ma è } 273 + t = T$$

$$PV = \frac{P_0 V_0}{273} T \quad \text{ponendo } \frac{P_0 V_0}{273} = R$$

$$PV = RT$$

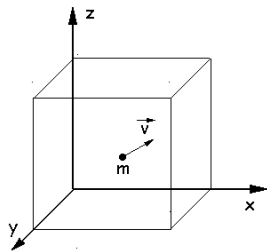
E se invece di una mole si hanno n moli di gas, l'equazione diviene

$$PV = nRT$$

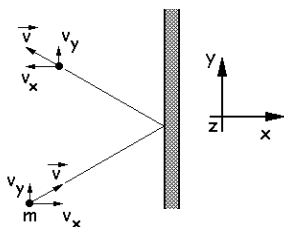
Teoria cinetico-molecolare dei gas perfetti

Vogliamo ora mettere in relazione le grandezze microscopiche con cui abbiamo definito il calore e la temperatura (la somma delle energie cinetiche e il suo valore medio), con le grandezze macroscopiche di pressione, volume e temperatura.

Consideriamo le molecole di gas perfetto come un insieme di N sferette con le seguenti caratteristiche:



- ✓ Il volume complessivo occupato dalle sferette è trascurabile rispetto al volume totale occupato dal gas.
- ✓ L'effetto del campo gravitazionale su di esse è trascurabile.
- ✓ Gli urti fra le sferette non avvengono mai: ci sono quasi esclusivamente urti (elastici) con le pareti del recipiente che contiene il gas.



Il gas sia contenuto in un recipiente cubico di lato d , come in figura.

Analizziamo innanzi tutto l'effetto dell'urto di una singola molecola con una parete del cubo.

Dopo l'urto, per esempio con una parete parallela al piano yz , le velocità variano nel modo seguente

$$v_x = -v_x$$

$$v_y = v_y$$

$$v_z = v_z$$

Cioè le componenti v_y e v_z rimangono invariate dopo l'urto (vedi figura).

Solo la componente perpendicolare alla parete subisce una inversione dopo l'urto elastico.

Ne deriva che le variazioni della quantità di moto, sono

$$\Delta Q_x = Q_{fx} - Q_{ix} = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

$$\Delta Q_y = 0$$

$$\Delta Q_z = 0$$

La ΔQ_x è negativa perché è la quantità di moto finale (dopo l'urto) meno quella iniziale (prima dell'urto).

Questa rappresenta la quantità di moto ceduta dalla particella e corrisponde alla quantità di moto acquistata dalla parete (e quindi positiva)

$$\Delta Q_x = 2mv_x$$

Questa quantità di moto viene ceduta dalla molecola alla parete in un intervallo di tempo intercorrente fra un urto e il successivo sulla stessa parete.

La quantità di moto ceduta dalla particella alla parete yz nell'unità di tempo è

$$\frac{\Delta Q_x}{t} = \frac{2mv_x}{t} = 2mv_x \frac{v_x}{l} = \frac{2mv_x^2}{l}$$

Quella ceduta dalla particella a tutte e tre le pareti nell'unità di tempo è

$$\frac{\Delta Q}{t} = \frac{\Delta Q_x}{t} + \frac{\Delta Q_y}{t} + \frac{\Delta Q_z}{t} = \frac{2m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{l} = \frac{2mv^2}{l}$$

Infatti scomponendo la velocità v nelle tre componenti v_x , v_y e v_z , applicando Pitagora (vedi a destra), si ha

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Ora, dal secondo principio della meccanica, sappiamo che

$$f = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{t}$$

e perciò, sostituendo nella relazione precedente, si ha che

$$f = \frac{2mv^2}{l}$$

rappresenta anche **la forza che una singola particella esercita sulle pareti del recipiente nell'unità di tempo.**

La pressione corrisponde alla forza f divisa per la superficie S del recipiente (ma è $S = 6l^2$ perché il cubo ha sei facce quadrate di lato l). E quindi

$$P = \frac{f}{S} = \frac{2mv^2}{6l^3} = \frac{mv^2}{3V}$$

dove V è il **volume** del recipiente in cui è contenuto il gas, mentre v è la **velocità** della particella.

Quindi
$$PV = \frac{1}{3}mv^2$$

Se invece in una singola particella consideriamo tutte le particelle che costituiscono il gas, abbiamo allora

$$PV = \frac{1}{3} \sum mv^2$$

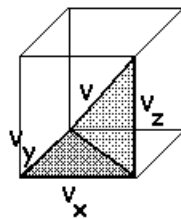
Ora, dalla definizione di **energia cinetica media**, abbiamo anche

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \frac{\sum mv^2}{N}$$

dove N è il numero di particelle. Ricavando $\sum mv^2$ e sostituendo nella precedente, si ha

$$PV = \frac{2}{3}N\bar{E}$$

da cui si vede come il prodotto PV non dipende dalla natura del gas, ma solo dalla sua **energia cinetica media** (Legge di Boyle-Mariotte).



Abbiamo quindi messo in relazione, come avevamo intenzione di fare, le grandezze macroscopiche di pressione e volume con la grandezza microscopica di energia cinetica media.

Infine, ricordando l'equazione caratteristica dei gas perfetti, possiamo scrivere

$$\begin{cases} PV = \frac{2}{3} N\bar{E} \\ PV = nRT \end{cases}$$

$$\frac{2}{3} N\bar{E} = nRT$$

$$\bar{E} = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT = \frac{3}{2} KT$$

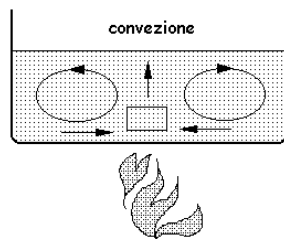
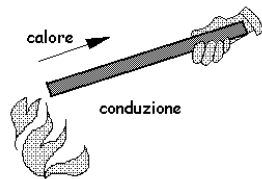
dove K si chiama costante di Boltzmann.

L'ultima relazione evidenzia come **la temperatura assoluta sia proporzionale all'energia cinetica media** (in accordo a quanto precedentemente affermato).

Propagazione del calore

Il calore può propagarsi in tre diversi modi:

1. Per **conduzione**: Le particelle del corpo a diretto contatto del calore aumentano la loro energia, si muovono più velocemente, e comunicano per urti successivi la loro agitazione alle altre particelle più vicine. Si quindi una propagazione di energia lungo il corpo senza però che vi sia uno spostamento di materia: le particelle rimangono sostanzialmente nella loro posizione. Alcuni corpi permettono facilmente una simile diffusione del calore (e sono i **conduttori termici**, come i metalli per esempio), altri subiscono questo effetto in misura minore (e vengono detti **isolanti termici**, come la ceramica per esempio).
2. Per **convezione**: Se il corpo è un fluido, le particelle più vicine alla sorgente di calore si riscaldano maggiormente, si dilatano, e in quella regione il fluido diventa meno denso. Per la spinta di Archimede tende allora a "galleggiare" cioè a sollevarsi, lasciando il posto ad altro fluido leggermente meno caldo. Si



crea allora uno spostamento di materia, un moto circolare, che viene detto **corrente convettiva**. Questo fenomeno si verifica per esempio in una stanza per effetto di una stufa, o in una pentola d'acqua.

3. Per **irraggiamento**: Una sorgente di calore emette anche radiazioni elettromagnetiche (abbiamo già accennato alla natura ondulatoria della luce e come questa si trasformi in calore per opportuni valori della frequenza). Infatti sappiamo che il calore viene riflesso da uno specchio come la luce visibile, ed attraversa per esempio lo spazio vuoto per giungere dal Sole fino a noi. Questo è possibile proprio grazie alla natura ondulatoria del calore.



Nel **vaso di Dewar** (noto anche con il nome di Thermos) i liquidi vengono mantenuti a lungo freddi o caldi perché vengono ridotte al minimo gli scambi di calore dovuti a questi tre motivi.

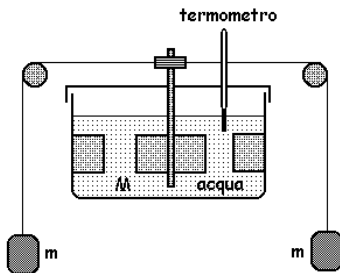
Infatti il thermos è realizzato in vetro che è un buon isolante termico e quindi viene ridotta al minimo la conduzione di calore.

Poi il vetro ha una parete doppia entro cui viene fatto il vuoto, in modo da impedire la dispersione del calore per convezione (nel vuoto non ci può essere spostamento di masse di fluido).

Infine le pareti del recipiente sono lavorate a specchio in modo da riflettere indietro l'irraggiamento termico.

L'equivalente meccanico della caloria

Avendo osservato che ogni lavoro meccanico può essere trasformato in calore, Joule (nel 1843) volle determinare la relazione esistente fra un generico lavoro L eseguito e la corrispondente quantità Q di calore.



Realizzò un dispositivo come quello mostrato in figura: un recipiente isolato termicamente con l'esterno conteneva una massa M nota di acqua,

Due pesetti di massa m scendendo di una lunghezza h , eseguivano un lavoro pari a

$$L = (2m)gh$$

Nella discesa mettevano in rotazione un perno con delle palette che determinavano un attrito con l'acqua (delle contropalette fissate sul recipiente impedivano all'acqua di mettersi in rotazione insieme all'acqua, facendo in modo che tutto il lavoro meccanico si trasformasse in attrito e quindi in calore).

Misurando il piccolo aumento di temperatura Δt ottenuto in seguito alla produzione di calore, poteva calcolare il calore prodotto

$$Q = C_s M \Delta t$$

Potè così constatare **che il rapporto fra lavoro eseguito e calore prodotto è costante**, che tale costante (indicata con la lettera **J**) vale 4,182 viene detta **equivalente meccanico della caloria**

$$\frac{L}{Q} = 4,182 = J$$

Quindi 1 Joule corrisponde a 4,182 calorie.

A questo punto potremmo anche abbandonare il concetto di caloria, e misurare le quantità di calore direttamente in Joule.

In realtà per tradizione si continua ancora ad usare la caloria (anche se per esempio su molti alimenti l'indicazione del contenuto calorico viene fornita in entrambi i modi).

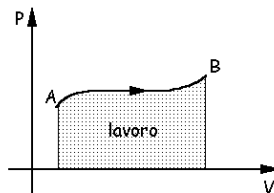
LA TERMODINAMICA

La termodinamica studia gli scambi energetici fra un sistema (generalmente un gas) e l'ambiente esterno, con particolare riguardo alle trasformazioni di lavoro in calore e viceversa.

Una trasformazione si dice **reversibile** se effettuata al contrario, permette di riportare il gas nelle stesse condizioni iniziali.

In realtà questa ipotesi non si realizza mai e **tutte le trasformazioni reali sono irreversibili**, ma si può ottenere una trasformazione quasi reversibile se questa viene effettuata molto lentamente.

Nel piano PV la regione tratteggiata (vedi figura) corrisponde sempre al lavoro speso per la trasformazione. Infatti dimensionalmente pressione per volume equivale a



$$\frac{\text{forza}}{\text{superficie}} \times \text{volume} = \text{forza} \times \text{lunghezza} = \text{lavoro}$$

Se la trasformazione va da B ad A il lavoro è negativo.

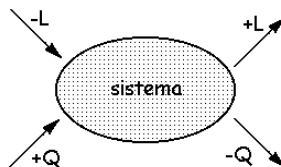
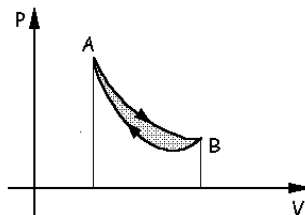
Se la trasformazione è ciclica, poiché è irreversibile, si avranno lavori diversi per andare da A a B e per tornare da B ad A.

Il lavoro totale è dato dalla superficie della regione tratteggiata nella figura seguente. Se la trasformazione è molto lenta questa regione è molto sottile.

Per convenzione si considera positivo il lavoro che il sistema esegue sull'ambiente esterno, e negativo quello che eseguiamo dall'esterno sul sistema.

Per quanto riguarda gli scambi di calore invece, il calore è positivo se viene fornito al sistema, mentre è negativo se viene ceduto dal sistema all'ambiente esterno.

Per ricordare questa convenzione conviene fare riferimento allo schema qui a fianco.



Primo principio della termodinamica

Supponiamo di portare 1 Kg di acqua distillata da 15°C a 100 °C (il calore specifico dell'acqua è $= C_s = 1$).

La trasformazione può essere ottenuta in infiniti modi diversi:

Possiamo fornire calore all'acqua senza eseguire alcun lavoro meccanico di espansione o compressione. In tal caso avremo

$$\begin{cases} \Delta Q = C_s m \Delta t = 1 \times 1 \times 85 = 85 \text{ Cal} \\ \Delta L = 0 \end{cases}$$

Oppure possiamo evitare di fornire calore e di aumentare la temperatura in seguito ad un lavoro di compressione (il lavoro è eseguito dall'esterno sul sistema e perciò in base alla convenzione precedente sarà negativo). Si troverà

$$\begin{cases} \Delta Q = 0 \\ \Delta L = -85 \text{ J} \end{cases}$$

Oppure possiamo (in infiniti modi differenti) fornire in parte calore, ed in parte eseguire un lavoro meccanico.

In ogni caso la trasformazione darà lo stesso risultato se sommiamo il calore ceduto al sistema (positivo) e il lavoro eseguito su di esso (negativo). L'energia (costante, e che dipende solo dalle condizioni iniziali e finali) spesa per ottenere la trasformazione, prende il nome di **energia interna** ($= \Delta U$) in quanto ha prodotto delle modificazioni energetiche sulle particelle del sistema. In formule scriveremo

$$\Delta Q - \Delta L = \Delta U$$

Cioè l'energia interna è una **funzione di stato**, nel senso che la sua variazione dipende soltanto dalle condizioni iniziali e finali ma non dal modo in cui si è ottenuta la trasformazione.

È evidente l'analogia con il lavoro meccanico nel campo gravitazionale, in cui il lavoro non dipendeva dal percorso ma solo dai punti iniziale e finale.

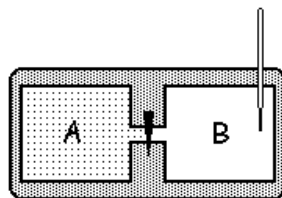
Si noti anche che se la trasformazione è **ciclica** (cioè se la condizione iniziale coincide con quella finale), allora $\Delta U = 0$ e si ha

$$\Delta Q - \Delta L = 0$$

$$\Delta Q = \Delta L$$

Energia interna

Sia dato il dispositivo indicato a fianco, costituito da due recipienti A e B collegati fra loro da un condotto munito di rubinetto.



Tutto il dispositivo è isolato termicamente con l'esterno, un gas perfetto è contenuto in A, in B c'è il vuoto, ed un termometro è inserito in B.

Apriamo il rubinetto (per esempio con un impulso elettrico: il lavoro eseguito è nullo. Ma anche la quantità di calore fornita al sistema è nulla.

Il volume e la pressione del gas però variano.

Si può constatare (leggendo il termometro) che la temperatura rimane costante.

Dal primo principio, sapendo che $\Delta L=0$ e $\Delta Q=0$, risulta che anche $\Delta U=0$, cioè l'energia interna si è mantenuta costante.

Ne deriva che l'energia interna varia solo al variare della temperatura, e quindi **in una trasformazione isoterma l'energia interna rimane costante.**

Il ciclo di Carnot

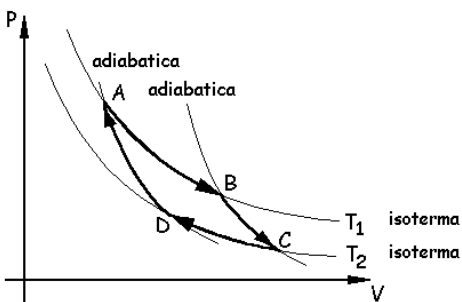
Un motore termico trasforma il calore in lavoro meccanico. Un'auto per esempio, è un motore termico.

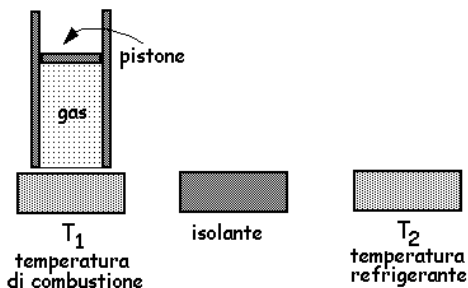
Ogni motore funziona eseguendo **cicli** di trasformazioni identici fra loro.

Carnot ideò un motore (astratto e perfetto) che compie un ciclo di trasformazioni con un rendimento massimo mai raggiungibile da alcun motore reale.

Per rendimento si intende il rapporto fra il lavoro meccanico ottenuto e il calore disponibile ad ogni ciclo.

Sul piano PV (detto piano di Clapeyron) la trasformazione è quella indicata nella figura precedente. Si noti che **il verso deve essere quello orario.**





Il ciclo parte da A con una espansione isoterma a temperatura T_1 (analogo alla fase di scoppio dei motori reali), seguita da una ulteriore espansione adiabatica (in cui il gas raggiunge la temperatura esterna T_2 (detta temperatura refrigerante). Poi c'è una compressione isoterma ed una ulteriore compressione adiabatica che riporta il gas nello stato iniziale A.

La macchina vera e propria non si può realizzare in pratica, ma applichiamo il primo principio della termodinamica a ciascuna delle quattro trasformazioni.

Il gas perfetto è contenuto in un cilindro con pareti isolate termicamente, e con un pistone (anche lui isolato).

Sul fondo del cilindro c'è una sottile pellicola che ha l'unico scopo di impedire al gas di uscire.

Disponiamo poi di tre basi: la prima è una sorgente capace di fornire calore ad una temperatura T_1 .

La seconda è costituita semplicemente da materiale isolante termico.

La terza è una sorgente capace di assorbire calore a temperatura T_2 (minore della precedente).

Cominciamo a porre il cilindro sulla base A e con una espansione isoterma facciamo espandere il gas per un certo tempo.

Poiché la trasformazione è isoterma la variazione di energia interna è nulla e si ha

$$\begin{cases} \Delta U_{AB} = 0 \\ \Delta L_{AB} = \Delta Q_1 \end{cases}$$

Poniamo il cilindro sulla base centrale e continuiamo ad espandere il gas fino a quando questo non raggiunge la temperatura T_2 .

La trasformazione è adiabatica e perciò

$$\begin{cases} \Delta Q_{BC} = 0 \\ \Delta L_{BC} = -\Delta U_{BC} \end{cases}$$

Trasportiamo poi il cilindro sulla terza base e lasciamo che il gas ceda (isotermicamente) del calore alla sorgente T_2 fino al punto in cui l'isoterma CD incontra l'adiabatica passante per A.

La trasformazione è isoterma e allora

$$\begin{cases} \Delta U_{CD} = 0 \\ \Delta L_{CD} = -\Delta Q_2 \end{cases}$$

Infine, con un'ultima compressione adiabatica, dopo aver posto il cilindro sulla base centrale, si riporta il gas nello stato iniziale.

$$\begin{cases} \Delta Q_{DA} = 0 \\ \Delta L_{DA} = \Delta U_{DA} \end{cases}$$

Ora tiriamo le somme sul bilancio totale del calore e del lavoro in tutto il ciclo.

Il lavoro totale è

$$\begin{aligned} L &= L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = \Delta Q_1 - \Delta U_{BC} - \Delta Q_2 + \Delta U_{DA} = \\ &= \Delta Q_1 - \Delta Q_2 \end{aligned}$$

(perché $U_A=U_B$ e $U_C=U_D$ in quanto punti appartenenti alle stesse isoterme e quindi $\Delta U_{BC}=\Delta U_{DA}$).

Dove ΔQ_1 è il calore prelevato dalla sorgente T_1 e ΔQ_2 è il calore ceduto alla sorgente T_2 .

Sapendo che il calore totale disponibile per il ciclo è ΔQ_1 , il rendimento μ in un ciclo è dato da

$$\mu = \frac{\text{lavoro ottenuto}}{\text{calore disponibile}} = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1}$$

Tale rendimento è sempre minore di 1 e corrisponde al rendimento di una macchina ideale.

Si vede come la trasformazione del calore in lavoro non può mai avvenire completamente, ma solo una parte del calore può essere trasformata in lavoro.

Inoltre è possibile tale trasformazione solo se si hanno due temperature diverse: è impossibile ottenere lavoro dal calore con una sola temperatura.

Si può dimostrare che il rendimento della macchina di Carnot si può scrivere anche

$$\mu = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Se per esempio la temperatura nel cilindro di un'auto è di 500°C e quella esterna è di 15°C , il rendimento della macchina di Carnot è

$$T_1 = 500 + 273 = 773^\circ K$$

$$T_2 = 15 + 273 = 288^\circ K$$

$$\mu = \frac{773 - 288}{773} = \frac{485}{773} = 0,6 \cong 60\%$$

Il rendimento di una qualsiasi auto reale è comunque molto più basso e arriva generalmente ad un massimo del 35%.

ELETTROMAGNETISMO

Il campo gravitazionale

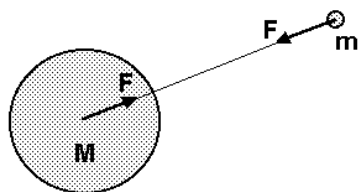
In una zona di spazio (che possiamo considerare circoscritta in una regione di spazio o estesa fino all'infinito) viene definito un campo se:

- Ad ogni punto di tale spazio è associato il valore di una grandezza fisica.
- Se tale grandezza fisica varia con continuità.

Se la grandezza fisica associata ad ogni punto è vettoriale, il campo è un campo **vettoriale**, altrimenti il campo è **scalare**.

Un esempio di campo vettoriale è quello costituito da due masse (che si attraggono fra loro con la legge gravitazionale di Newton).

Sia **M** una grande massa (costituita per esempio da un pianeta) e **m** una piccola massa (che chiameremo massa **esploratrice** o massa **di prova**).



In linea di principio le due masse potrebbero anche essere più o meno uguali, ma in questo caso dovremmo prendere in considerazione sia il campo gravitazionale generato dalla prima massa e il suo effetto nei confronti della seconda, sia il campo gravitazionale generato dalla seconda e il suo effetto nei confronti della prima.

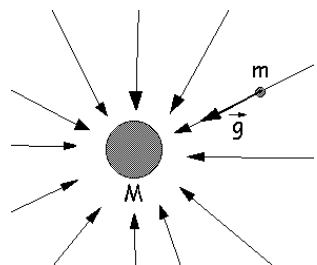
Invece se una delle due è molto piccola rispetto all'altra possiamo prendere in considerazione solo il campo gravitazionale generato dalla massa maggiore, e trascurare il campo gravitazionale generato dalla massa piccola.

La forza che agisce sulle due masse, secondo la legge di Newton, è

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{d^2}$$

ed è sempre uguale per entrambi i corpi anche se uno è molto grande e l'altro molto piccolo (cioè la forza esercitata dal primo corpo sul secondo, è sempre uguale a quella esercitata dal secondo sul primo).

Potremmo associare ad ogni punto dello spazio il valore della forza con cui la massa esploratrice viene attratta dal pianeta, **ma con tale scelta l'intensità di campo \vec{F} dipenderebbe dal valore della massa esploratrice.**



È quindi più conveniente definire il campo gravitazionale prendendo come **intensità di campo** il rapporto

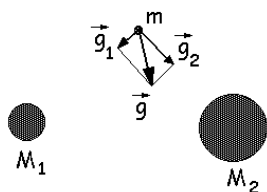
$$\frac{\vec{F}}{m} = G \frac{M}{d^2} = \vec{a}$$

che corrisponde alla accelerazione (\vec{a} = accelerazione di gravità = \vec{g}) e non dipende più dal valore di m, ma solo dalla massa M del pianeta che è costante, e dalla distanza d.

In seguito daremo per scontato che le direzioni del vettore \vec{g} siano sempre rivolte verso il baricentro della massa M.

In realtà occorrerebbe scomporre la massa M in infinite particelle ciascuna con una massa piccolissima. Ciascuna di queste piccole masse genera una propria intensità di campo, ed alla fine fare la somma vettoriale di tutte le accelerazioni di gravità ottenute con questo procedimento. Se le due masse sono sufficientemente lontane fra loro possiamo evitare questa complicazione ed immaginare tutta la massa M concentrata in un solo punto (il suo baricentro).

Il principio di sovrapposizione



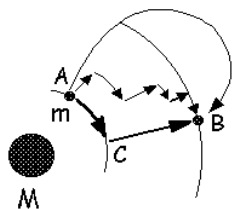
Se il campo gravitazionale è creato da due (o più) masse M_1 ed M_2 (non necessariamente uguali fra loro), allora si può ragionare calcolando l'intensità \vec{g}_1 come se l'altra massa M_2 non esistesse, e poi si fa la stessa cosa con l'altra massa per ottenere \vec{g}_2 .

Infine si sommano vettorialmente le due intensità \vec{g}_1 e \vec{g}_2 per ottenere la intensità risultante \vec{g} .

Per il principio di sovrapposizione tutte queste intensità di campo possono sommarsi vettorialmente per ottenere una unica risultante \vec{g} che è diretta verso il baricentro di M.

Il vettore \vec{g} risulta sempre **tangente** alle linee di forza. Si può affermare che le linee di forza corrispondono alla traiettoria che la massa m seguirebbe se fosse lasciata libera di muoversi, con velocità iniziale nulla.

Il teorema della circuitazione



Se immaginiamo di spostare la massa esploratrice m dal punto A al punto B, possiamo seguire infiniti percorsi diversi.

Immaginiamo di seguire il percorso lungo l'arco di circonferenza AC e poi lo spostamento rettilineo CB lungo il raggio.

Il lavoro necessario lungo AC è nullo (perché forza agente e spostamento sono in ogni punto perpendicolari fra loro).

Lungo lo spostamento CB invece forza e spostamento sono paralleli ed il lavoro eseguito corrisponde a

$$L = mgh$$

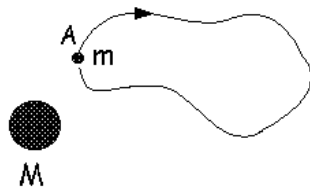
Dove mg è la forza (forza peso) ed h lo spostamento AB.

Se invece andiamo da A a B lungo la spezzata (vedi figura in alto), allora i lavori eseguiti durante gli spostamenti lungo gli archi di circonferenza sono sempre nulli, mentre i lavori eseguiti durante gli spostamenti radiali saranno

$$L = mgh_1 + mgh_2 + mgh_3 = mg(h_1 + h_2 + h_3) = mgh$$

Ed il lavoro totale è lo stesso del caso precedente. Anche seguendo altri percorsi si otterrà sempre lo stesso risultato: quindi il lavoro necessario per spostare la massa esploratrice da A a B (o anche l'energia potenziale che occorre spendere), si mantiene costante qualunque sia il percorso seguito.

Anche se il percorso è curvilineo, si può sempre immaginare di scomporlo in infiniti segmentini tangenti o radiali per ciascuno dei quali possono ripetersi le stesse considerazioni. Inoltre anche se, come in figura, la massa m viene allontanata da A in misura maggiore del necessario bisognerà compiere un lavoro più grande di mgh , ma quando la massa m viene riavvicinata e portata in B il lavoro in eccedenza viene restituito dal campo e il bilancio finale sarà sempre uguale ad mgh .



Il campo gravitazionale per questa ragione si chiama **conservativo** (perché il lavoro si conserva, rimane inalterato).

Cerchiamo di elaborare una definizione più sofisticata e rigorosa di questo concetto (anche se equivalente nella sostanza).

Un campo si dice conservativo se, spostando la massa esploratrice lungo un percorso chiuso qualsiasi il prodotto scalare fra intensità di campo e spostamento è sempre nullo.

In altre parole suddividendo il percorso in tanti segmentini tangenziali e radiali (talmente piccoli che l'intensità di campo non vari in modo apprezzabile da una estremità all'altra), la somma dei prodotti scalari ottenuti calcolando per ogni segmentino il prodotto scalare intensità di campo per spostamento deve essere sempre nulla.

$$\sum \vec{g} \cdot \vec{s} = 0$$

Questa definizione equivale ad affermare che il lavoro speso lungo lo spostamento deve essere nullo. Infatti moltiplicando entrambi i membri per m , si ha

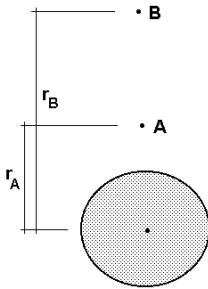
$$m \sum \vec{g} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\sum m \vec{g} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\sum \vec{f} \cdot \vec{s} = 0$$

$$L = 0$$

Differenza di energia potenziale



Consideriamo un pianeta (per esempio la Terra) di massa M , ed una massa esploratrice m che spostiamo dal punto A al punto B.

Ci proponiamo di calcolare **il lavoro necessario per effettuare tale spostamento**.

Per semplicità i punti A e B sono allineati con il centro della terra: infatti il campo gravitazionale è **conservativo** ed il lavoro dipende soltanto dalla distanza iniziale r_A e dalla distanza finale r_B ma non dal percorso seguito per andare da A a B.

Il lavoro necessario per spostare la massa m da A a B è

$$\mathbf{L} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l} = \vec{F} \cdot (r_B - r_A) = \sqrt{F_A \cdot F_B} (r_B - r_A)$$

(si noti guardando la figura che l'angolo fra i due vettori è nullo e quindi il coseno è uguale ad uno), dove \vec{F} è il **valore medio** della forza (media **geometrica** e non **aritmetica**, perché la forza di Newton non è direttamente proporzionale ad r , ma è inversamente proporzionale **al quadrato di r**).

Sostituendo i valori corrispondenti alle due forze \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B si ottiene

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{G \frac{Mm}{r_A^2} \cdot G \frac{Mm}{r_B^2}} \cdot (r_B - r_A) = G \frac{Mm}{r_A \cdot r_B} (r_B - r_A) = \\ &= GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto per sollevare la massa m si è trasformato in **energia potenziale ΔU**

$$\Delta U = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

N.B.

Si noti che questa formula **non è in contraddizione** con la nota formula $\Delta U = mgh$, che esprime la energia potenziale di un corpo ad una altezza h dal suolo, proposta quando si introdussero per la prima volta i concetti di energia cinetica ed energia potenziale.

Infatti immaginando di far coincidere il punto A con la superficie del pianeta ($r_A = R$) e supponendo di innalzare la massa m di una lunghezza l molto piccola rispetto al raggio del pianeta ($r_B = R + h$ con $h \ll R$), la formula (3) diviene

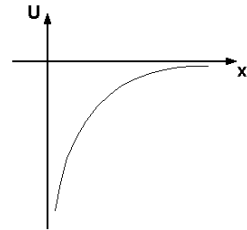
$$L = G \frac{Mm}{r_A \cdot r_B} (r_B - r_A) = G \frac{Mm}{R(R+h)} h \cong G \frac{Mm}{R^2} h = Fh = mgh$$

cioè la formula sopra in cornice si trasforma nella $\Delta U = mgh$ se la variazione di quota avviene nei pressi della superficie del pianeta, e se tale variazione è trascurabile rispetto al raggio del pianeta.

Energia potenziale in un punto

L'energia potenziale può essere definita solo per i campi conservativi (e il campo gravitazionale lo è). Abbiamo già visto che la differenza di energia potenziale necessaria per portare la massa m da A a B è

$$\Delta U = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$



Definiamo la energia potenziale in un punto a distanza x da M per mezzo dell'espressione

$$U_x = -\frac{GMm}{x}$$

Ora, per calcolare la differenza di potenziale fra i due punti A e B, si può applicare tale espressione al punto **finale** B ottenendo U_B , e al punto **iniziale** A ottenendo U_A .

La differenza coincide appunto con la formula precedente.

$$\Delta U = U_B - U_A = -\frac{GMm}{r_B} - \left(-\frac{GMm}{r_A} \right) = -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Osservando la funzione U_x si può riconoscere che corrisponde ad una iperbole, e più precisamente ad un solo ramo (dato che non hanno significato le distanze negative), che occupa il quarto quadrante.

L'energia potenziale ha quindi sempre valore negativo, aumenta man mano che m si allontana da M , ed ha valore nullo quando x diventa infinita.

Potenziale in un punto

In modo analogo a quanto fatto a proposito della definizione di intensità di campo, possiamo dividere l'energia potenziale per la massa esploratrice ottenendo così una nuova grandezza, detta **potenziale**, che non dipende più dalla massa esploratrice.

$$V_x = \frac{U}{m} = G \frac{M}{x}$$

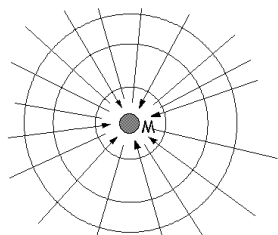
Il potenziale si indica con la lettera V . Sia l'energia potenziale che il potenziale sono grandezze scalari.

Il potenziale può essere definito solo per i campi **conservativi**.

Riassumendo le definizioni di energia potenziale e di potenziale in un punto, possiamo affermare che:

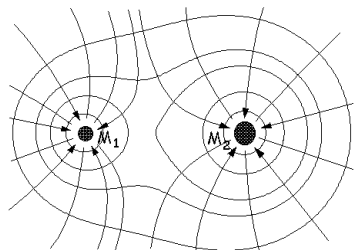
- L'energia potenziale è il lavoro che è necessario fornire alla massa m per portarla fuori dal campo (cioè a distanza infinita).
- Il potenziale è invece il lavoro che è necessario fornire alla massa m **unitaria** per portarla fuori dal campo (cioè a distanza infinita).

Superfici equipotenziali



In un campo radiale (generato da una sola massa) tutti i punti che si trovano su una stessa sfera concentrica con la massa M , hanno lo stesso potenziale (perché questo dipende solo dalla distanza x).

Essi formano una **superficie equipotenziale**. Esistono quindi infinite superfici equipotenziali corrispondenti alle infinite sfere concentriche con M .



Una proprietà delle superfici equipotenziali consiste nel fatto che le linee di forza sono sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali nel punto in cui le attraversano. Se il campo è formato da due masse M_1 ed M_2 , il campo ha linee di forza che possono ottenersi applicando il principio di sovrapposizione.

posizione.

Le superfici equipotenziali, rispettando la proprietà appena enunciata avranno allora la forma indicata nella figura a fianco.

Intensità del campo elettrico

Abbiamo visto che il campo gravitazionale è conservativo e la forza con cui la massa m viene attratta dalla massa M è data dalla **legge di Newton**

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{d^2}$$

in cui la costante G (costante di gravitazione universale) è molto piccola:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} = 0.0000000000667$$

I corpi aventi una carica elettrica si attraggono invece con una forza data dalla **legge di Coulomb**

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Qq}{d^2}$$

dove ϵ_0 viene detta **costante dielettrica nel vuoto**, e ϵ_r **costante dielettrica del mezzo**.

La prima è anch'essa piccola

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} = 0.00000000008854$$

ma poiché si trova nel denominatore rende, al contrario della precedente, la forza elettrica molto maggiore di quella gravitazionale.

La seconda costante invece varia al variare del mezzo in cui si trovano le cariche:

$\epsilon_r = 1$	nel vuoto
$\epsilon_r = \text{circa } 1$	nell'aria
$\epsilon_r = \text{circa } 80$	nell'acqua
ecc	

molte volte sui testi la ϵ_r viene omessa perché si immagina di operare nel vuoto o nell'aria.

Una differenza fondamentale fra la forza di Newton e quella di Coulomb consiste quindi nel fatto che mentre la prima ha una costante G fissa, la seconda ha una costante che varia a seconda del mezzo in cui si trovano le cariche.

Una seconda differenza importante è costituita dal fatto che la forza gravitazionale può essere solo attrattiva, mentre quella elettrica può essere sia attrattiva (cariche di segno opposto) che repulsiva (cariche dello stesso segno).

Corrispondenze tra campo gravitazionale e campo elettrico

La somiglianza fra la legge di Newton e quella di Coulomb non si limita ad una identica struttura matematica (pur se con qualche differenza).

Tutto quello che abbiamo detto a proposito del campo gravitazionale può essere ripetuto esattamente anche per il campo elettrico.

Così, l'intensità di campo elettrico è il rapporto fra la forza che agisce sulla carica q esploratrice (che per convenzione viene sempre considerata **positiva**), e la carica q stessa. Tale intensità viene indicata con la lettera **E** ed è una grandezza vettoriale

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{o anche} \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

Vale il principio di sovrapposizione.

Il campo elettrico è conservativo perché per ogni percorso chiuso si ha

$$\sum \vec{E} \cdot \vec{s} = 0$$

cioè il prodotto scalare fra intensità di campo e spostamento è nullo.

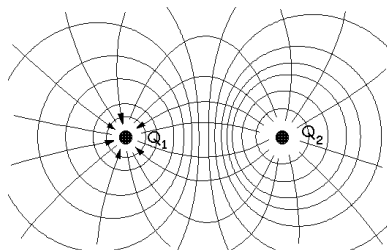
Questo equivale ad affermare che il lavoro è nullo: infatti moltiplicando i due membri per la carica di prova q , si ha

$$q \sum \vec{E} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\sum q\vec{E} \cdot \vec{s} = 0$$

$$\sum \vec{f} \cdot \vec{s} = 0$$

$$L = 0$$



Per l'energia potenziale U si ottiene (con un ragionamento identico a quello fatto per il campo gravitazionale)

$$\Delta U = KQq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad \text{dove} \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$$

Per l'energia potenziale in un punto

$$U_x = -\frac{KQq}{x}$$

Ed infine per il potenziale

$$V_x = \frac{U_x}{q} = -K \frac{Q}{x}$$

Resta da esaminare una possibilità che per il campo gravitazionale non era possibile: quella del campo elettrico formato da una carica Q_1 **negativa** e da una carica Q_2 **positiva**.

Si noti che le linee di forza entrano sempre nel corpo carico negativamente, ed escono dal corpo carico positivamente.

Le intensità di campo in ogni punto si possono ricavare con il principio di sovrapposizione.

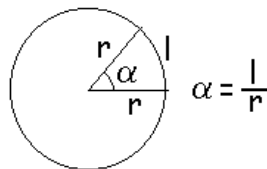
Un campo di questo tipo si chiama **solenoidale**.

Le linee di forza risultano sempre tangenti alle intensità di campo, e le superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di forza.

Il radiante e lo steradiante

Data una circonferenza di raggio r arbitrario ed un angolo α , consideriamo l'arco l di circonferenza delimitato dall'angolo α .

Ebbene, l'angolo α misurato in radianti, come è noto, corrisponde al rapporto fra l'arco l ed il raggio r . È **adimensionale** perché è il rapporto fra due lunghezze.



Consideriamo ora una sfera di raggio r arbitrario ed **un angolo solido ω** .

Tale angolo solido, misurato in **steradiani**, corrisponde al rapporto fra la superficie S delimitata sulla sfera dall'angolo solido, ed il quadrato del raggio r .

Anche l'angolo solido ω è adimensionale perché risulta dal rapporto fra due superfici.

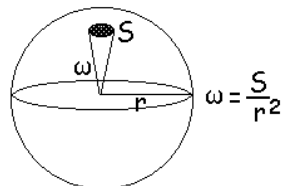
L'angolo solido totale (corrispondente all'angolo giro per la circonferenza) è di 4π .

Infatti nel caso della circonferenza la lunghezza l corrisponde alla lunghezza della circonferenza stessa, e perciò

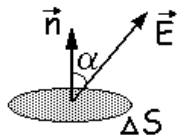
$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

mentre nel caso della sfera la superficie S corrisponde alla superficie della sfera stessa, e perciò

$$S = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$



Il flusso



Si abbia una superficie ΔS immersa in un campo vettoriale, per esempio un campo elettrico.

La superficie sia talmente piccola da poter considerare il vettore \vec{E} costante in tutti i punti interni alla superficie.

Il prodotto $\Delta S \vec{n}$ di uno scalare per il versore \vec{n} (si chiama versore un vettore di lunghezza unitaria. Viene adoperato, come in questo caso per rendere vettoriale una grandezza scalare) trasforma lo scalare ΔS in un vettore diretto come \vec{n} .

Si definisce **flusso** (e si indica con la lettera Φ) del vettore \vec{E} attraverso la superficie ΔS il prodotto scalare

$$\Phi = \Delta S \vec{n} \cdot \vec{E} = \Delta S E \cos \alpha$$

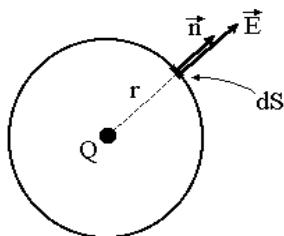
Tale flusso assume il valore massimo quando \vec{n} è parallelo ad \vec{E} , ed il valore nullo quando \vec{n} ed \vec{E} sono perpendicolari.

In altre parole il flusso "quantifica" il numero di linee di forza che attraversano la superficie ΔS : se \vec{n} è parallelo ad \vec{E} il numero di linee di forza che attraversano la superficie (si dice anche che sono concatenate con essa), è massimo.

Se invece \vec{n} ed \vec{E} sono perpendicolari nessuna linea di forza attraversa la superficie.

Teorema di Gauss

Prima fase



Si abbia una carica Q (per semplicità' nel vuoto o nell'aria), e attorno ad essa consideriamo una regione di spazio avente forma sferica, **con raggio arbitrario r**

Consideriamo ancora una piccola regione dS della sua superficie. Sia inoltre \vec{n} il **versore** (vettore unitario perpendicolare alla superficie stessa), ed \vec{E} il vettore **intensità' del campo elettrico**.

Il flusso elementare che passa attraverso la superficie dS è

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

(in cui il puntino fra E ed n sta ad indicare il prodotto scalare)

Il **flusso totale** che passa attraverso **tutta** la superficie sferica è quindi

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2$$

ma, essendo $E = F/q$ si può anche scrivere

$$\Phi = 4\pi r^2 \frac{F}{q}$$

$$\Phi = 4\pi r^2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{q} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

cioè

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Seconda fase

Ora generalizziamo la trattazione prendendo in considerazione una regione di spazio intorno alla carica Q , **di forma arbitraria** e non più sferica.

Il flusso elementare attraverso la superficie dS è

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS =$$

$$= E \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

ma (osservando il particolare ingrandito in basso a destra nella figura qui sopra), risulta

$$dS' = dS \cos \alpha$$

cioè dS' è la proiezione di dS su un piano perpendicolare ad E .

La carica Q vede le superfici dS e dS' sotto uno stesso **angolo solido $d\omega$** .

Si ricordi a questo proposito che l'angolo solido $d\omega$ misurato in steradiani corrisponde a

$$d\omega = dS/r^2 = dS'/r^2$$

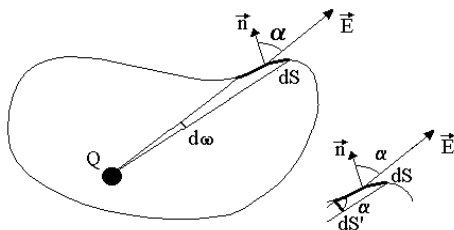
e che l'**angolo solido totale è 4π** .

Il flusso elementare è allora

$$d\Phi = \frac{F}{q} dS' = \frac{qQr^2 d\omega}{4\pi\epsilon_0 r^2 q}$$

e il flusso totale attraverso l'intera superficie chiusa, ampliando l'angolo $d\omega$ fino a farlo diventare uguale all'angolo solido totale, è

$$\Phi = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{4\pi r^2}{q} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Confrontando questo risultato con il precedente, si può affermare che il flusso totale attraverso una superficie solida chiusa è sempre uguale a $\frac{Q}{\epsilon_0}$ qualunque

sia la forma di tale superficie.

Se all'interno della superficie considerata non ci sono cariche, evidentemente **il flusso sarà nullo**.

Terza fase

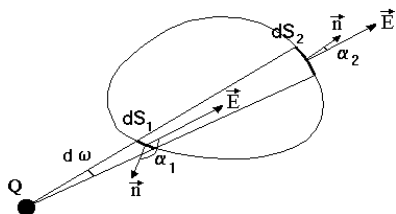
Ma cosa accadrà se una carica **Q** è **esterna** alla superficie solida chiusa ?

Un generico angolo solido $d\omega$ intercetterà le due superfici dS_1 e dS_2 .

Il flusso attraverso queste superfici è uguale in modulo (perché le due superfici dS'_1 e dS'_2 sono viste dalla carica sotto uno stesso angolo solido $d\omega$), ma di segno opposto perché l'angolo α_2 è **acuto** mentre l'angolo α_1 è **ottuso** (e quindi il coseno sarà positivo nel primo caso e negativo nell'altro).

I flussi attraverso le due superfici sono quindi uguali ed opposti, e si annullano fra loro.

Anche allargando l'angolo $d\omega$ fino a quando tutta la superficie chiusa sarà stata presa in considerazione, il flusso totale sarà comunque nullo.

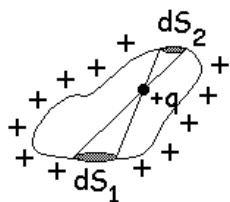


Campo elettrico all'interno di un conduttore (pieno o cavo)

Se il conduttore è pieno le cariche (per esempio positive) si respingono fra loro e si disporranno sulla sua superficie.

In ogni caso, anche se il conduttore è vuoto le cariche si trovano dunque solo in superficie, **in equilibrio**, ed in modo tale che la **densità di carica σ** (

$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ cioè la il rapporto fra la carica contenuta entro una superficie e la superficie stessa) **sia costante**.



La densità di carica aumenta nelle punte, ed è costante per una superficie sferica.

Immaginiamo di porre una carica di prova $+q$ all'interno del corpo, e consideriamo una retta passante per tale carica che, ruotando, formi **un angolo solido $d\omega$** . Tale angolo intercetta sulla

superficie del solido due regioni rispettivamente di superficie dS_1 e dS_2 .

Le cariche che si trovano su tali superfici respingeranno la carica $+q$ rispettivamente con le forze F_1 ed F_2 .

Vogliamo ora dimostrare che, qualunque sia l'angolo solido $d\omega$ le due forze sono sempre uguali (ed opposte).

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdQ_1}{d_1^2} \\ \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdQ_2}{d_2^2} \end{cases}$$

dove dQ_1 e dQ_2 sono le cariche esistenti sulle due superfici e d_1 e d_2 sono invece le distanze delle due superfici dalla carica $+q$.

Dalla definizione di densità di carica e sapendo che questa è costante, si ricava

$$\begin{cases} dQ_1 = \sigma dS_1 \\ dQ_2 = \sigma dS_{21} \end{cases}$$

Inoltre, per definizione di steradiante, si ha

$$\begin{cases} dS_1 = d_1^2 d\omega \\ dS_2 = d_2^2 d\omega \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} dQ_1 = \sigma d_1^2 d\omega \\ dQ_2 = \sigma d_2^2 d\omega \end{cases}$$

Sostituendo nella espressione della forza, si ottiene

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\sigma d_1^2 d\omega}{d_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\sigma d\omega \\ \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\sigma d_2^2 d\omega}{d_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\sigma d\omega \end{cases}$$

quindi è

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

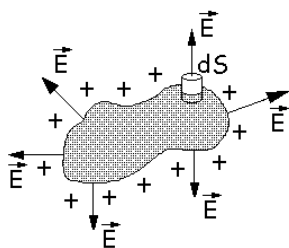
qualunque sia l'angolo solido $d\omega$. In particolare anche quando l'angolo solido si allarga fino a quando le due superfici dS_1 e dS_2 si allargano fino a comprendere l'intera superficie del conduttore.

La carica $+q$ è dunque sottoposta ad una **forza risultante nulla**.

Poiché il campo elettrico è dato dal rapporto fra la forza che agisce su q e la carica q stessa ($\mathbf{E}=\mathbf{F}/q$), il campo elettrico nel punto in cui si trova la carica q è nullo.

Questo punto è arbitrario, e dunque **all'interno di un conduttore carico** (con le cariche in equilibrio) **il campo elettrico è sempre nullo**.

Teorema di Coulomb



Si abbia un corpo carico con le cariche in equilibrio.

La sua superficie è una **superficie equipotenziale** (perché il potenziale varia solo al variare della distanza, e questa ha sempre lo stesso valore per tutti i punti della sua superficie).

In una zona arbitraria della sua superficie immaginiamo si trovi un cilindretto le cui basi

abbiano superficie dS , e che siano parallele alla superficie del corpo.

L'altezza del cilindro sia arbitraria e piccola, con l'unico vincolo che una base risulti interamente interna al corpo e l'altra base sia esterna.

Calcoliamo il flusso che attraversa il cilindretto.

- Attraverso la base inferiore (interna al corpo) il flusso Φ è nullo perché $\vec{E}=0$.
- Attraverso la superficie laterale del cilindro il flusso è nullo perché il versore \vec{n} normale alla superficie è perpendicolare al vettore E , e quindi il prodotto scalare $\Phi = \Delta S \vec{n} \cdot \vec{E} = \Delta S E \cos \alpha$ è nullo perché $\alpha=90^\circ$.
- Attraverso la base superiore esterna al corpo (ma infinitamente vicina ad esso), si ha $\Phi = E dS$ (l'angolo α è nullo). E, ricordando il teorema di Gauss si può scrivere

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E dS$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E \frac{Q}{\sigma}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = E \frac{1}{\sigma}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Quindi il valore del campo elettrico sulla superficie di un corpo carico corrisponde sempre al rapporto fra la densità di carica e la costante dielettrica.

Campo elettrico fra due lamine metalliche aventi cariche opposte

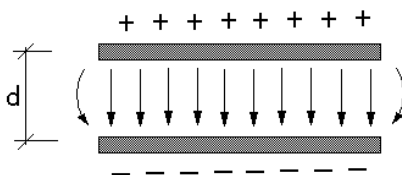
Siano date due lamine metalliche contrapposte (vedremo che costituiscono un dispositivo che si chiama condensatore piano), aventi cariche uguali e di segno opposto.

Queste lamine si trovino ad una distanza d fra loro.

All'interno ci saranno linee di forza parallele che escono dalla lamina con carica positiva ed entrano nella lamina con carica negativa. Un campo di questo tipo si chiama **campo uniforme**.

Se immaginiamo di voler trasportare una carica di prova $+q$ dalla lamina negativa a quella positiva, qual è il lavoro che dovremmo compiere ?

La forza applicata e lo spostamento sarebbero paralleli e quindi l'angolo α è nullo, ed il prodotto scalare è dato dal semplice prodotto della forza per lo spostamento.



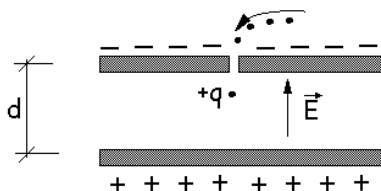
$$L = Fd = Eqd$$

$$\Delta V = \frac{L}{q} = Ed$$

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Quindi il valore del campo elettrico per un condensatore piano è dato dal rapporto fra la differenza di potenziale fra le due lamine (dette anche armature) e la loro distanza.

Esperienza di Millikan



È molto importante perché permise nel 1908 di misurare per la prima volta la carica di un singolo elettrone.

Prendiamo un condensatore piano carico, nella cui armatura superiore sia stato fatto un piccolo foro.

Attraverso il foro vengono spruzzate goccioline di olio (si usa olio per la semplice ragione che evapora più lentamente e quindi le goccioline restano per un tempo maggiore di dimensione costante).

Le goccioline hanno un diametro pressoché costante.

Alcune di esse (vedi figura) hanno una carica positiva ed il campo elettrico agirà con una forza diretta verso l'alto.

Ogni tanto avviene che una gocciolina si fermi a mezza altezza. Evidentemente in questo caso la forza di gravità che tende a trascinarla verso il basso è esattamente bilanciata dalla forza elettrica che la tira verso l'alto.

Uguagliando le due forze si ha

$$mg = qE$$

$$mg = q \frac{\Delta V}{d} \quad (\text{vedere il campo } E \text{ in un condensatore})$$

$$q = \frac{mgd}{\Delta V}$$

Questa relazione ci permette di misurare la carica q posseduta dalla goccia d'olio.

Il parametro g è noto, d e ΔV si possono facilmente misurare, come si può però misurare la massa m della goccia ?

Si procede in questo modo:

si scaricano completamente le due armature del condensatore.

La goccia è ora sottoposta alla sola forza peso ($p=mg$) ed in teoria dovrebbe muoversi con moto uniformemente accelerato, ma per la presenza dell'aria (a causa della sua piccola massa) raggiunge quasi istantaneamente una **velocità costante di regime**.

È noto infatti che qualunque corpo in caduta libera, per effetto dell'attrito con l'aria, che aumenta all'aumentare della velocità, tende gradatamente a muoversi con accelerazione decrescente fino a raggiungere una velocità di regime costante.

Conoscendo la velocità di regime e la densità dell'olio si può ricavare la massa della goccia. Ebbene, la velocità della goccia si ricava semplicemente osservando con un microscopio quanto tempo è necessario alla goccia per percorrere una lunghezza nota. La densità dell'olio si calcola semplicemente facendo il rapporto fra la massa di una congrua quantità di olio e il suo volume.

Millikan effettuò queste misure ed ottenne una serie di misure che presentavano una singolare particolarità.

Erano tutte **multiple di un certo valore**. Per la precisione erano tutte multiple del valore

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} = e$$

Questa carica è la più piccola carica esistente in natura e corrisponde alla carica di un elettrone.

Per questa ragione si dice che **la carica elettrica è quantizzata**: cioè non può assumere valori arbitrari qualsiasi, ma soltanto valori multipli della carica di un elettrone.

Capacità di un conduttore

Si abbia un conduttore carico (per semplicità sia sferico e con raggio r).
Abbiamo visto che il suo potenziale è

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(se immaginiamo negativa la carica Q non c'è il segno meno)

Il denominatore è costante: indichiamo con C tale costante e chiamiamola **capacità** del conduttore.

Si chiama capacità perché se si hanno due conduttori (sempre sferici per semplicità), di raggio diverso, poiché il raggio è a denominatore quello più grande assumerà un potenziale minore ed avrà un valore maggiore di capacità. Sarà necessario fornirgli altra carica perché raggiunga lo stesso potenziale dell'altro.

Quindi il corpo più grande ha una capacità C maggiore e può accogliere una carica Q maggiore per raggiungere un potenziale stabilito.

Quindi possiamo scrivere

$$Q = CV \quad \text{con} \quad C = 4\pi\epsilon_0 r \quad \text{per un corpo sferico}$$

Se il corpo non è sferico il concetto rimane valido ugualmente, ma il calcolo di C sarà un pochino più laborioso.

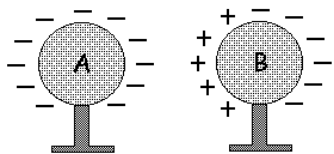
Dunque C è il rapporto fra la carica Q che possiamo fornire ad un conduttore e il potenziale V che assume la sua superficie.

Se misuriamo la carica in Coulomb ed il potenziale in Volt, la capacità C risulta espressa in **farad** (abbreviato = F).

Però questa unità di misura risulta sproporzionata per gli usi pratici: si pensi che anche se il conduttore sferico fosse grande come tutta la terra, la sua capacità sarebbe di circa 1 farad.

Si usano allora dei sottomultipli: il μF pari ad un milionesimo di farad, ed il pF pari ad un $\mu\mu\text{F}$ cioè ad un milionesimo di milionesimo di farad.

Il condensatore



Si abbia un corpo A (per esempio una sfera metallica) carica negativamente, su un supporto isolante. Esso ha una capacità C .

Ora poniamo nelle sue vicinanze un secondo corpo B neutro. Per induzione le cariche esistenti sul corpo A spostano quelle di B

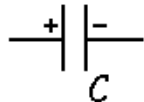
attraendo verso di se quelle positive e respingendo quelle negative.

Per operare questo spostamento il campo elettrico compie un lavoro, quindi spende energia ed il potenziale del corpo A si abbassa. Occorre fornire altre cariche al corpo A per farlo ritornare al potenziale iniziale.

In altre parole il sistema formato dai due corpi è in grado di ricevere una carica maggiore per raggiungere un certo potenziale, rispetto al caso in cui il corpo A sia preso da solo. Dunque il sistema dei due corpi ha una capacità maggiore.

Non è necessario che i corpi siano sferici, e non è necessario che il secondo corpo sia neutro: la sostanza del fenomeno resta invariata.

Ebbene un sistema costituito da due conduttori posti ad una certa distanza fra loro si chiama **condensatore**.



Il condensatore più semplice da studiare è quello formato da due lastre metalliche (dette **armature**) poste parallelamente fra loro ad una certa distanza.

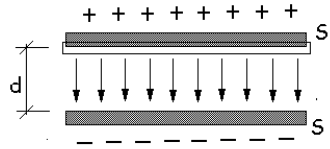
Viene chiamato **condensatore piano**, e fra le armature ci può essere semplicemente dell'aria o una sostanza isolante

detta **dielettrico**.

Nei circuiti elettrici il condensatore viene rappresentato da due linee parallele ed uguali.

Capacità di un condensatore piano

Consideriamo un condensatore piano, con armature di superficie S e poste alla distanza d . Prendiamo ora in considerazione una regione di spazio a forma di parallelepipedo (vedi figura), con una faccia interna ad una armatura e calcoliamo il flusso attraverso tale parallelepipedo.



- Il flusso attraverso la faccia interna all'armatura il flusso è nullo perché all'interno dell'armatura il campo elettrico \vec{E} è nullo.
- Il flusso attraverso le facce laterali il flusso è nullo perché il campo \vec{E} è perpendicolare alle facce (e quindi ad \vec{n}).
- Il flusso attraverso l'ultima faccia (compresa fra le due armature) è invece

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n}S = ES \quad (\text{perché i due vettori sono paralleli})$$

Ma per il teorema di Gauss il flusso è $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ e, come si è visto in

precedenza, il campo elettrico all'interno del condensatore è $E = \frac{V}{d}$.

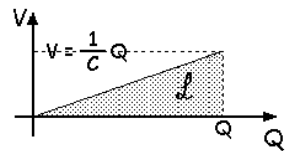
Sostituendo si ha

$$\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{V}{d} S$$

$$\frac{Q}{V} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

Questa formula permette di calcolare la capacità di un condensatore piano. Si osservi che tale capacità aumenta all'aumentare della superficie S e del valore della costante dielettrica ϵ_r dovuta al mezzo contenuto fra le due armature, ma **diminuisce all'aumentare della distanza d** .



Sul piano QV la legge della capacità ($Q = CV$) corrisponde ad una retta passante per l'origine.

Poiché dimensionalmente il prodotto QV equivale a

$$[QV] = \left[Q \frac{L}{q} \right] = [L] \quad \text{cioè un lavoro}$$

la zona tratteggiata fra la retta $V = \frac{1}{C}Q$ e l'asse delle ascisse corrisponde al lavoro che è necessario compiere per caricare le armature del condensatore: è **il lavoro di carica del condensatore**.

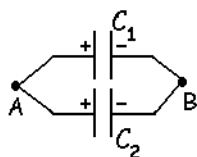
Facendo i calcoli si trova

$$L = Q \cdot \frac{Q}{C} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

che può essere scritta anche nelle forme equivalenti

$$L = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV.$$

Capacità in serie e in parallelo



Se due condensatori sono collegati fra loro nel modo a fianco indicato, si dice che sono disposti **in parallelo**.

Indicando con Q_1 e Q_2 le cariche presenti sulle armature di ciascun condensatore e C_1 e C_2 le corrispondenti capacità, si ha

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_{AB} \\ Q_2 = C_2 V_{AB} \end{cases}$$

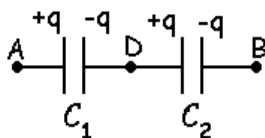
Sommando membro a membro, si ottiene

$$Q_1 + Q_2 = C_1 V_{AB} + C_2 V_{AB} = V_{AB} (C_1 + C_2)$$

cioè $Q = V_{AB} C$ dove $C = C_1 + C_2$.

Dunque **la capacità totale del sistema formato da due condensatori in parallelo è semplicemente la somma delle singole capacità**.

Se invece i condensatori sono disposti nel modo a fianco indicato, essi si dicono **disposti in serie**.



Occorre notare subito che (anche nel caso in cui le capacità C_1 e C_2 siano molto diverse fra loro), le armature dei due condensatori hanno sempre la stessa carica.

Infatti la parte centrale del sistema (che va dall'armatura destra di C_1 a quella sinistra di C_2) è **isolata elettricamente** dalla presenza del dielettrico o dell'aria.

Quindi tale parte centrale rimane nel complesso neutra, si può caricare soltanto per induzione in quanto un certo numero di elettroni viene spinto da una parte; ne deriva che la parte opposta ha una carica positiva ma esattamente uguale all'altra.

Dopo questa osservazione possiamo ricavare che

$$\begin{cases} Q = C_1 V_{AD} \\ Q = C_2 V_{DB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{AD} = \frac{Q}{C_1} \\ V_{DB} = \frac{Q}{C_2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro, si ha

$$V = V_{AD} + V_{DB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

e quindi

$$V = Q \frac{1}{C}$$

Ciòè **l'inverso della capacità totale è uguale alla somma degli inversi delle singole capacità.**

La corrente elettrica

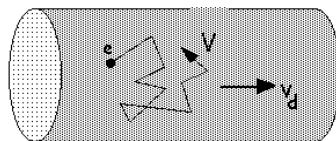
Un conduttore metallico è formato da un reticolo cristallino di atomi (che oscillano e vibrano in modo crescente all'aumentare della temperatura, ma che sono abbastanza saldamente vincolati a mantenere le posizioni reciproche.

Ogni atomo metallico ha un elettrone più esterno che è legato più debolmente degli altri al proprio nucleo (l'elettrone **libero** o **di conduzione**) e in presenza di un campo elettrico può spostarsi abbastanza liberamente all'interno del metallo.

Questo elettrone però urta continuamente gli atomi del reticolo e cambia rapidamente direzione.

È come se un minuscolo pesciolino vagasse zigzagando in una tubazione contenente un liquido che si sposta per esempio verso destra.

Chiaramente occorrerà distinguere fra la velocità V del pesciolino e la velocità di trascinamento, di deriva v_d dovuta alla corrente del liquido.



Ebbene la velocità V ha un valore molto alto (circa 10^6 m/s), mentre quella di deriva è molto molto più bassa (circa 10^{-4} m/s).

Quindi, malgrado l'elettrone si muova ad una velocità di poco inferiore a quella della luce, la sua velocità effettiva all'interno del conduttore è di soli 3 metri ogni ora !

È il campo elettrico \vec{E} a propagarsi con velocità $c = 3 \cdot 10^8$ m/s e non le singole cariche.

Occorre poi tenere presente l'alto numero di elettroni che occorrono per formare un Coulomb:

$$1 \text{ Coulomb} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

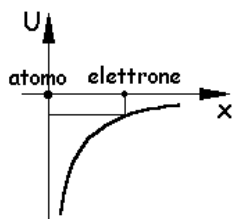
Ebbene la corrente elettrica viene misurata in Ampere (A) e corrisponde al passaggio in un conduttore di 1 Coulomb in un secondo.

In ogni caso vale la relazione $i = \frac{q}{t}$

Vale la pena notare che il verso della corrente viene convenzionalmente fatto corrispondere **al verso opposto a quello di effettivo movimento degli elettroni**, e ciò a causa del fatto che un tempo si credeva che fossero le cariche positive quelle che muovendosi provocavano i fenomeni elettrici.

Tale convenzione è rimasta in vigore perché non provoca cambiamenti nelle leggi fisiche.

Elettroni liberi di conduzione

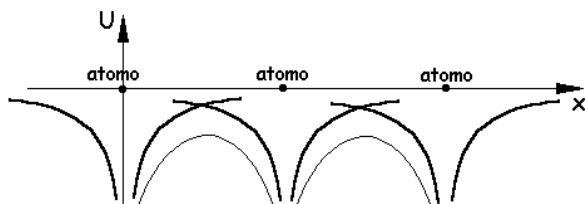


Gli elettroni liberi di conduzione possono muoversi liberamente all'interno del metallo, ma in condizioni normale non possono uscire da esso.

Abbiamo visto che nel caso in cui la carica che genera il campo elettrico è di segno contrario alla carica esploratrice, si ha una energia potenziale che è espressa da un ramo di iperbole.

Nel caso del metallo si hanno appunto gli elettroni liberi che hanno carica **negativa**, e atomi con un elettrone in meno (quindi ioni **positivi**), disposti in modo da formare un reticolo cristallino.

Consideriamo ora una serie di atomi (o meglio ioni) disposti a distanza regolare fra loro. Le energie potenziali si sommano fra loro e ne deriva una configurazione simile a quella con linea più sottile in figura.

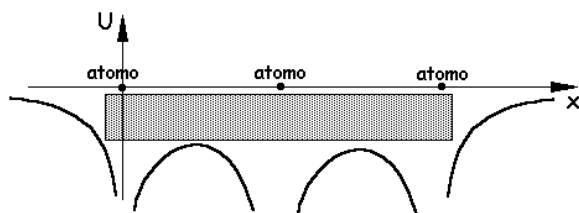


Solo in corrispondenza del primo e dell'ultimo atomo della fila non si avrà un abbassamento dell'energia potenziale a causa della somma.

Gli elettroni di conduzione si trovano dunque liberi di muoversi entro la regione ombreggiata, ma non possono uscire dal metallo per via del salto di energia che dovrebbero superare.

Questo salto si chiama **energia di estrazione** e varia da metallo a metallo.

Basta scaldare il metallo perché gli elettroni acquistino sufficiente energia cinetica per potersi liberare ed uscire dal metallo.



La regione ombreggiata prende anche il nome di **buca energetica** o **di potenziale** del metallo.

Il fenomeno in base al quale il calore riesce a liberare elettroni dal metallo si chiama **effetto termoionico**.

La resistenza elettrica e le leggi di Ohm

Comunque anche a temperatura ambiente gli ioni del reticolo cristallino vibrano e ruotano e rendono bassa la velocità v_d degli elettroni tanto più bassa quanto più ampie sono le loro vibrazioni.

Si chiama **corrente elettrica** il flusso di elettroni che attraversa un conduttore e, nella impossibilità di contare il numero di elettroni che passano nell'unità di tempo, si definisce corrente elettrica il numero di Coulomb che passa ogni secondo in una sezione del conduttore.

Quando questo è attraversato dalla carica di 1 Coulomb ogni secondo, si dice che la corrente elettrica è di **1 ampere** (A).

Aumentando la temperatura il reticolo cristallino si muove maggiormente e gli elettroni sono maggiormente frenati nel loro spostamento.

Ogni conduttore offre quindi una certa resistenza al passaggio della corrente. Esistono anche dispositivi

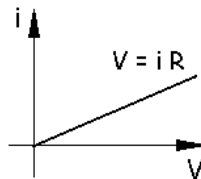


opportunamente realizzati che offrono una resistenza piuttosto alta alla corrente elettrica e prendono il nome di resistori o **resistenze**.

Una resistenza viene indicata simbolicamente con una linea a zigzag.

Il calcolo della resistenza di un conduttore può essere determinato dalle **due leggi di Ohm**.

- **PRIMA LEGGE** - Il rapporto fra la differenza di potenziale applicata agli estremi di un conduttore e la corrente che passa attraverso lo stesso, è costante. Questa costante si chiama resistenza e corrisponde ad 1 Ohm (\square) quando la differenza di potenziale di 1 Volt provoca il passaggio della corrente di 1 Ampere. Indicando semplicemente con V la differenza di potenziale, si ha



$$\frac{V}{i} = R \quad \text{o anche} \quad V = iR$$

Questa relazione corrisponde ad una retta nel piano Vi e permette di ottenere la resistenza di un conduttore facendo realmente passare corrente elettrica nel suo interno.

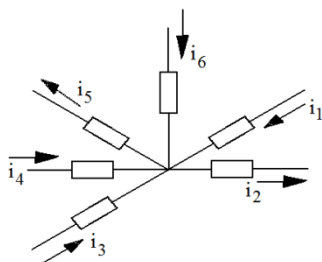
- **SECONDA LEGGE** - Permette, al contrario, di calcolare la resistenza di un conduttore senza far passare corrente al suo interno, ma tenendo conto semplicemente delle sue dimensioni, la sua forma, il materiale di cui è fatto e la sua temperatura.

Indicando con S la superficie di una sezione del conduttore, con l la sua lunghezza, vale la relazione

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove ρ prende il nome di **resistività**, dipende dal materiale con cui è formato il conduttore ed è direttamente proporzionale alla sua temperatura.

I principi di Kirchhoff



Esistono due principi sui circuiti elettrici: uno che riguarda i **nodi** (cioè il punto in cui convergono due o più componenti elettrici) ed un'altro che riguarda le **maglie** (cioè i gruppi di componenti che sono collegati lungo una linea chiusa).

1° principio

Considerando positive le correnti che entrano

in un nodo e negative quelle che ne escono (o viceversa), **la somma algebrica delle correnti che entrano ed escono da un nodo è sempre nulla.**

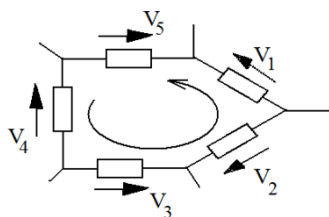
Quindi

$$\sum_k i_k = 0 \quad \text{cioè} \quad i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

2° principio

La somma algebrica delle d.d.p. lungo una linea chiusa (maglia), è sempre nulla. Nella maglia deve essere scelto un verso arbitrario di percorrenza, ed in ogni lato della maglia la tensione deve essere presa con segno positivo o negativo, a seconda che il verso della tensione coincida o no con il verso di orientamento della maglia. Quindi

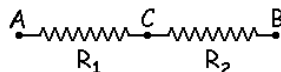
$$\sum_k V_k = 0 \quad \text{cioè} \quad V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 = 0$$



Resistenze in serie e in parallelo

Se due resistenze sono collegate fra loro nel modo a fianco indicato, si dice che sono disposte **in serie**.

Indicando con R_1 e R_2 le due resistenze e con V_{AC} e V_{CB} le corrispondenti differenze di potenziale applicate ai loro estremi, osservando che entrambe



le resistenze sono forzatamente attraversate dalla stessa corrente i , si ha

$$\begin{cases} V_{AC} = R_1 i \\ V_{CB} = R_2 i \end{cases}$$

Sommando membro a membro, si ottiene

$$V_{AC} + V_{CB} = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$$

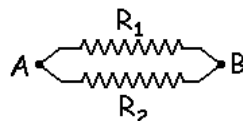
cioè $V_{AB} = R i$ dove $R = R_1 + R_2$.

Dunque **la resistenza totale del sistema formato dalle due resistenze in serie è semplicemente la somma delle singole capacità.**

Se invece le due resistenze sono disposte nel modo a fianco indicato, esse si dicono **disposte in parallelo**.

Per il primo principio di Kirchhoff la corrente i che entra nel nodo A è sempre uguale alla somma delle due correnti i_1 e i_2 che ne escono.

Ad entrambe le resistenze è applicata la stessa differenza di potenziale V_{AB} .



Si può scrivere

$$\begin{cases} V_{AB} = R_1 i_1 \\ V_{AB} = R_2 i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \\ i_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro, si ha

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} = V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_{AB}}{R}$$

e quindi

$$i = \frac{V}{R}$$

Ciò è l'inverso della resistenza totale è uguale alla somma degli inversi delle singole resistenze.

Effetto Joule

Quando un conduttore è attraversato da corrente elettrica il campo elettrico esegue un lavoro per muovere le cariche.

Si ha $L = V q$

Ma per la prima legge di Ohm è $V = iR$ e per definizione di corrente elettrica è $q = it$ e quindi sostituendo si trova

$$L = iR it = i^2 R t \text{ Joule}$$

Questa relazione esprime il lavoro (in Joule) compiuto dal campo elettrico nel tempo t per spostare gli elettroni all'interno del metallo.

Ricordando l'equivalente meccanico della Caloria ($J = L/Q$) che permette di trasformare il lavoro da Joule in Calorie ($Q = L/J$), e sostituendo nella relazione precedente, si ha

$$Q = \frac{i^2 R t}{J} \text{ Calorie}$$

che esprime la quantità di calore prodotta dal passaggio della corrente.

Quindi il passaggio della corrente riscalda il conduttore (si pensi ai fornelli elettrici, ai ferri da stiro, alle stufe elettriche, agli accendi sigarette per auto, ecc) e tale riscaldamento è calcolabile con la formula precedente.

Ritornando all'espressione in Joule e dividendo ambo i membri per il tempo t si ha

$$\frac{L}{t} = i^2 R$$

che rappresenta la potenza W (lavoro/tempo = potenza) associata al passaggio di corrente.

Ricordando la prima legge di Ohm la potenza W può essere espressa in tre modi equivalenti

$$W = i^2 R = Vi = \frac{V^2}{R} \quad \text{Watt}$$

Conduzione nei liquidi

L'acqua distillata non conduce quasi affatto: non possiede elettroni di conduzione, né altre particelle cariche che spostandosi possano creare una corrente elettrica e quindi la sua resistenza è praticamente infinita.

Aggiungendo ad essa un **composto organico** (per esempio zucchero), la sua conducibilità resta generalmente inalterata.

Se invece diluiamo in acqua un **composto inorganico** (un sale, un acido o una base), la conduzione generalmente aumenta: cerchiamo di capirne il perché.

Intanto diciamo che qualsiasi sostanza che disciolta in acqua la rende conduttrice prende il nome di **elettrolita**.

La maggior parte delle molecole delle sostanze organiche ha legami ionici o eteropolari la cui natura ha origine elettrica.

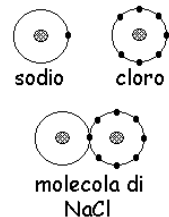
Per esempio una molecola di cloruro di sodio (il normale sale da cucina = NaCl) è formata da un **atomo di Sodio** (che ha un elettrone sul guscio più esterno e che perciò è legato più debolmente al resto dell'atomo perché più lontano dal nucleo), e da un **atomo di Cloro** (che ha sette elettroni sul guscio più esterno e che quindi tende a catturare un elettrone per completare un otetto).

I due atomi sono uniti fra loro a formare una molecola perché il Cloro cattura l'elettrone del Sodio trascinandosi appresso anche tutto l'atomo.

La forza che tiene uniti i due atomi a formare una molecola, è la forza elettrica di Coulomb espressa, come abbiamo visto, dalla formula

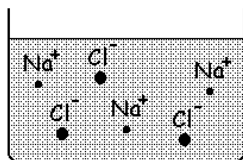
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Qq}{d^2}$$

Ora versiamo del sale da cucina in un recipiente contenente acqua.



Ebbene, la costante dielettrica ϵ_r dipendente dal mezzo è circa 1 nell'aria, ma aumenta fino ad 80 nell'acqua.

Ciò vuol dire che la forza che tiene unite le due molecole diminuisce nell'acqua di ben 80 volte (perché ϵ_r si trova a denominatore).



NaCl in soluzione

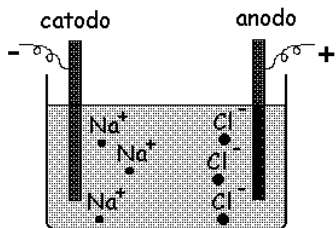
Il risultato è che l'agitazione termica del liquido è sufficiente a rompere il legame elettrico e la molecola NaCl si rompe.

L'elettrone però rimane intrappolato nell'atomo di cloro ed i due tronconi di molecola non sono più neutri ma diventano ioni (ioni Cl^- e ioni Na^+).

Gli ioni sono distribuiti nell'acqua in modo disordinato e casuale.

Non tutte le molecole si dividono in ioni: c'è un equilibrio dinamico fra molecole che si dividono in ioni e ioni che casualmente si ricongiungono a formare nuovamente molecole.

Questo fenomeno prende il nome di **dissociazione elettrolitica**.



Elettrolisi

In queste condizioni la soluzione può condurre la corrente elettrica che però a differenza dei metalli è dovuta allo spostamento degli ioni e non degli elettroni.

Se immergiamo nella vaschetta due barrette metalliche (dette **elettrodi**) collegate con una batteria esterna, gli ioni negativi vengono attirati dalla barretta positiva (detta **anodo**) e quelli positivi dalla barretta negativa (detta **catodo**).

Si ha una separazione degli ioni e il fenomeno prende ora il nome di **elettrolisi**.

Spesso ci sono anche reazioni chimiche fra gli ioni e gli elettrodi e questo effetto viene adoperato per ricoprire per esempio una barretta di argento o di oro (in tal caso la barretta viene sostituita dall'oggetto metallico che si vuole ricoprire), e viene denominato **galvanoplastica**.

Per quanto riguarda la conduzione elettrica, **se gli elettrodi sono uguali e se non avvengono reazioni chimiche su di essi**, la soluzione ha una resistenza elettrica che segue la legge di Ohm ($V = iR$).

Le leggi dell'elettrolisi

1. **La massa depositata su un elettrodo è proporzionale alla corrente elettrica** (e quindi in un tempo doppio si deposita sull'elettrodo una quantità doppia di sostanza). Questa legge permette di definire operativamente il **Coulomb**: se l'anodo è d'argento, il catodo di platino, l'elettrolita è il nitrato d'argento, allora 1 Coulomb corrisponde alla carica che fa depositare sul catodo 1,118 mg d'argento.
2. **Date più celle elettrolitiche disposte in serie** (in modo che siano tutte attraversate da una stessa corrente) **e contenenti elettroliti diversi, le masse che si depositano sugli elettrodi sono proporzionali agli equivalenti chimici**. Dove l'equivalente chimico è il rapporto fra massa atomica e valenza (per esempio per l'ossigeno è $16/2=8$).

Le esperienze di Volta

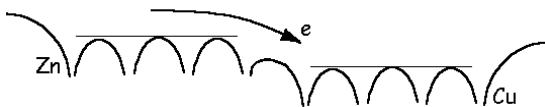
Galvani, come è noto, scoprì per primo che il muscolo della coscia di rana morta si contraeva non appena veniva toccato dalle punte di un compasso metallico.

Egli ipotizzò (erroneamente) che il muscolo della rana fosse sede di un fluido elettrico che in qualche modo provocava la contrazione.

Alessandro Volta invece era di opinione diversa (che si dimostrò corretta): il muscolo della rana si comportava come un elettroscopio e rivelava la ddp (differenza di potenziale) prodotta dal compasso che era formato da due metalli diversi.

Egli elaborò tre leggi fondamentali:

1. **Due metalli** (per esempio Rame e Zinco) **messi a contatto fra loro sviluppano nel punto di giunzione una ddp che dipende dal tipo dei metalli** (e dalla loro temperatura), **ma non dipende dalla estensione delle superfici a contatto**.



Con il concetto di buca di potenziale il fenomeno può essere interpretato molto facilmente: basta osservare la figura qui sopra. La ddp è data proprio dal differente livello delle due buche di potenziale.

2. Se si forma una catena di tre o più metalli, **la ddp fra il primo e l'ultimo è sempre uguale a quella che si avrebbe se il primo e l'ultimo metallo fossero a diretto contatto fra loro**. Osservando la figura seguente si vede chiaramente che la ddp fra il livello del primo metallo e quello del terzo

metallo è uguale a quella che si avrebbe se il metallo intermedio fosse eliminato.



Occorre osservare che le ddp previste da queste due leggi non possono essere sfruttate per produrre una corrente elettrica (e quindi per esempio per accendere una lampadina), perché quando si chiude il circuito, come in una gradinata che si chiude su se stessa, non sarà mai possibile avere gradini sempre in discesa: ad un certo punto per chiudere il circuito la ddp deve risalire e globalmente la ddp sarà sempre nulla.

3. I metalli vennero chiamati da Volta **conduttori di prima specie**. Le soluzioni acide o alcaline (che conducono elettricità per spostamento di ioni) vengono invece chiamate **conduttori di seconda specie**. Ebbene, la terza legge di Volta afferma che **se fra due conduttori metallici viene inserito un conduttore di seconda specie, allora la ddp globale che si ha quando si chiude il circuito non è più nulla e il dispositivo è in grado di fornire corrente elettrica** in modo continuo per un lungo tempo.

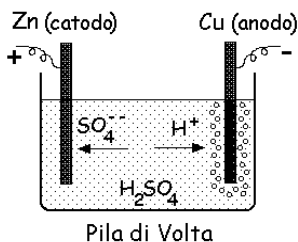
Con la terza legge si realizza la pila di Volta.

La pila di Volta

Poniamo in un recipiente dell'acqua nella quale abbiamo disciolto dell'acido solforico (andrebbe comunque bene anche un altro conduttore di seconda specie).

Immergiamo nel recipiente due elettrodi di metallo (per esempio Rame e Zinco, ma andrebbero bene altri due metalli qualsiasi).

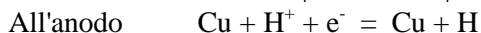
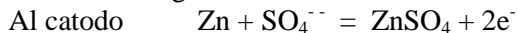
Abbiamo realizzato una catena di tre conduttori: due di prima specie ed in mezzo uno di seconda specie.



Questa catena costituisce il primo esempio di pila elettrica, un dispositivo capace di produrre ed erogare energia elettrica per un tempo molto lungo. Ormai le pile elettriche di questo tipo si realizzano solo per scopi didattici: le pile oggi sono molto sofisticate e diverse dal primo prototipo che stiamo per descrivere, realizzato da Volta.

Costituiscono addirittura un capitolo autonomo di chimica-fisica ancora oggi oggetto di studio per produrre pile più efficienti e di lunga durata.

Le reazioni che avvengono nei due elettrodi di Rame e Zinco sono le seguenti:



Si noti che la denominazione di anodo e catodo è opposta a quella vista per l'elettrolisi (cella passiva rispetto alla batteria che è attiva, produce elettroni).

L'elettrodo di zinco produce più ioni Zn^{2+} di quanti ioni Cu^{2+} riesca a produrre il Rame.

Di conseguenza all'interno dell'elettrodo di Zinco si creano un numero maggiore di elettroni che nel Rame.

Questo fenomeno provoca una differenza di potenziale (di circa 1,5 Volt) fra i due elettrodi, e questa ddp può essere utilizzata per compiere un lavoro o per accendere una lampadina.

Da notare che all'anodo si ha la produzione di H che sotto forma di bollicine di gas tende lentamente a ricoprire tutto l'anodo. Dopo un certo tempo la pila smette di funzionare perché tutto l'elettrodo positivo si è ricoperto di bollicine ed ostacola ulteriori reazioni chimiche. Si dice in questo caso che la pila è **polarizzata**, ed è per questo motivo che essa smette di funzionare.

Tutte le pile smettono di funzionare per effetto della polarizzazione. Uno dei primi e più semplici metodi per ritardare la polarizzazione (e quindi per aumentare il tempo di funzionamento della pila), è rappresentato dalla pila **Daniell**.

In tale pila l'anodo viene semplicemente rivestito da un materiale poroso con forellini che permettono il passaggio degli ioni, ma sufficientemente piccoli da impedire il passaggio delle bollicine di idrogeno.

Poiché la superficie dell'anodo con tale rivestimento era molto aumentata, ci voleva un tempo molto maggiore perché tutta la sua superficie si ricoprisse di bollicine e sopravvenisse le polarizzazione.

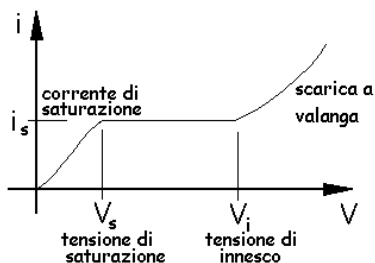
La pila funziona come una pompa che spinge gli elettroni dal catodo verso l'anodo (lungo il circuito esterno). Si ricordi però che il verso convenzionale della corrente è quello opposto al movimento degli elettroni.

La pila prende anche il nome di **batteria**. La ddp esistente fra i morsetti (elettrodi) prende anche il nome di **forza elettromotrice (fem)** della batteria.

Si noti che se la batteria non eroga corrente, la ddp fra i suoi morsetti corrisponde esattamente alla sua fem. Ma **se essa viene collegata in un circuito ed eroga corrente, la ddp fra i suoi morsetti scende ad un valore più basso.**

Conduzione nei gas

Un gas in condizioni normali è formato da molecole neutre che non permettono il passaggio della corrente elettrica: è un perfetto isolante.



Però se fra i due elettrodi non c'è solo il gas, ma un agente ionizzante (cioè se sono presenti ioni o una sorgente che produce ioni), allora la corrente elettrica può passare da un elettrodo all'altro.

La ddp fra i due elettrodi e la corrente elettrica sono legate fra loro da una funzione che generalmente ha lo stesso andamento tipico e che si chiama **funzione**

caratteristica dei gas.

Si abbiano quindi le due armature di un condensatore poste ad una certa distanza fra loro, fra di esse ci sia come dielettrico l'aria (che contiene naturalmente delle particelle ionizzate), e applichiamo alle due armature una ddp gradualmente crescente, registrando via via la corrente elettrica che passa fra le due armature.

Inizialmente, per piccole ddp, la corrente è proporzionale alla tensione e viene abbastanza rispettata la legge di Ohm.

A partire da una certa tensione V_s (detta **tensione di saturazione**) la corrente si stabilizza su un valore i_s detto **corrente di saturazione**.

Continuando ad aumentare la tensione, la corrente mantiene un valore costante.

Ad un certo punto, raggiunta una tensione critica V_i (detta **tensione di innesco**) la corrente aumenta velocemente producendo quella che si chiama **scarica a valanga**.

Questa curva caratteristica dipende però anche dalla pressione alla quale si trova il gas.

Analogia idraulica

Esiste un'ottima corrispondenza fra i fenomeni elettrici e quelli idraulici e tale corrispondenza può spesso aiutare a capire meglio certe caratteristiche dei circuiti elettrici. I termini corrispondenti sono i seguenti:

Quantità di carica elettrica	Quantità di liquido in un condotto
Corrente elettrica	Portata del condotto
Differenza di potenziale	Differenza di livello del liquido
Pila elettrica	Pompa
Resistenza elettrica	Attrito all'interno del condotto
Capacità di un condensatore	Capacità di un serbatoio
Legge di Kirkhoff sui nodi	Legge analoga sui nodi dei condotti
Interruttore elettrico	Rubinetto
Ecc	Ecc

Così, in un condotto passa del liquido solo se ai due estremi ci sono recipienti con liquidi a livello diverso, o se c'è una pompa che spinge il liquido in una direzione.

Più un condotto è sottile e lungo, e maggiore è la sua resistenza. In un nodo in cui convergono tre o più condotti, la somma dei litri al minuto che entrano nel nodo deve essere sempre uguale alla somma dei litri al minuto che escono (Legge di Kirkhoff).

E così via.

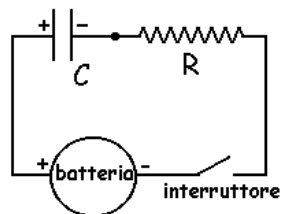
Il circuito RC

Consideriamo un condensatore C ed una resistenza R in serie fra loro, in una maglia in cui sia presente anche una batteria con fem = f ed un interruttore che ad un certo istante chiudiamo.

Nell'analogia idraulica abbiamo un condotto (di resistenza R) collegato ad un recipiente (di capacità C), collegati con una pompa f e con un rubinetto.

Si capisce subito con l'analogia che **chiudere l'interruttore equivale ad aprire il rubinetto**: la pompa comincia a spingere il liquido sollevandolo nel recipiente, ma man mano che questo si riempie la pompa faticherà sempre più per far salire l'acqua nel recipiente. Ad un certo punto si raggiungerà un equilibrio quando la spinta della pompa sarà esattamente uguale al peso del liquido sollevato.

Se illustriamo in un grafico l'andamento della quantità di liquido che entra nel recipiente al passare del tempo, avremo una curva che partendo da zero sale gradatamente fino ad un opportuno valore e poi rimane costante.



Vediamo se al di fuori dell'analogia questa ipotesi resta confermata anche per il circuito elettrico.

La fem della batteria deve essere uguale alla somma della ddp ai capi del condensatore e ai capi della resistenza.

$$f = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$f = \frac{Q}{C} + Ri \quad (\text{dalle formule } Q = CV \text{ e } V = iR)$$

ma è anche $i = \frac{dQ}{dt}$ e quindi

$$f = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}$$

che è una **equazione differenziale** (perché oltre alle variabili Q e t contiene anche le variabili dQ e dt).

Le **condizioni iniziali**, cioè lo stato del circuito nell'istante iniziale sono

$$\begin{cases} t = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

Questa equazione differenziale è di facile soluzione perché è possibile separare in un membro le variabili Q e dQ , e nell'altro membro le variabili t e dt .

La soluzione si trova semplicemente integrando entrambi i membri. Con questa operazione (una integrazione indefinita) si introduce una costante arbitraria per cui non si ha una sola soluzione, ma una famiglia di soluzioni.

Le condizioni iniziali rappresentano un punto che deve appartenere alla

soluzione, per cui imponendo alla famiglia di passare per il punto $\begin{cases} t = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$ si

ottiene la funzione cercata.

Cominciamo con il separare le variabili

$$f - \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{fC - Q}{C} = R \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{fC - Q}$$

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{-1}{fC - Q} dQ$$

$$-\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{-1}{fC - Q} dQ$$

Integrando (e ricordando che nella frazione a secondo membro il numeratore è la derivata del denominatore)

$$-\frac{t}{RC} + K = \ln(fC - Q)$$

dove k è la costante di integrazione.

Imponendo ora le condizioni iniziali ($t = 0$; $Q = 0$), si ottiene $k = \ln(fC)$.

Sostituendo si ha

$$-\frac{t}{RC} + \ln(fC) = \ln(fC - Q)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln \frac{fC - Q}{fC}$$

Cioè, passando dalla forma logaritmica a quella esponenziale,

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{fC - Q}{fC}$$

$$fC e^{-\frac{t}{RC}} = fC - Q$$

$$Q = fC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad \text{e, ponendo } RC = \tau$$

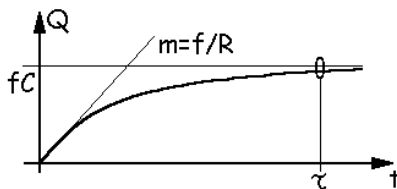
$$Q = fC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

La funzione è facilmente graficabile con i metodi tradizionali dell'analisi.

Il limite per t che tende a zero è zero, mentre il limite per t che tende ad infinito è fC .

La derivata della funzione è

$$\frac{dQ}{dt} = i = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



che è sempre positiva, quindi la funzione non ha massimi e minimi ed è sempre crescente.

La costante $\tau = RC$ rappresenta il tempo necessario perché la carica Q raggiunga un livello che differisca di un e -esimo dal valore di regime fC .

Come si vede resta confermata l'ipotesi prevista con l'analogia idraulica secondo la quale il flusso di elettroni rallenta gradualmente fino a fermarsi.

Con la analogia idraulica possiamo capire abbastanza bene cosa si intende per **modello** nella fisica: una struttura logico matematica che interpreta abbastanza fedelmente i fenomeni naturali (ma che ha comunque sempre dei limiti di validità superando i quali il modello non è più valido).

Per concludere la trattazione studiamo anche il comportamento del circuito quando riapriamo l'interruttore (che nell'analogia idraulica equivale a chiudere il rubinetto).

Questa volta abbiamo

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\frac{Q}{C} + Ri = 0$$

$$\frac{Q}{C} + R \frac{di}{dt} = 0$$

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{Q}$$

Che è ancora una equazione differenziale che può essere risolta in modo analogo alla precedente.

Le condizioni iniziali però sono diverse: $\begin{cases} t = 0 \\ Q = fC \end{cases}$

Integriamo entrambi i membri

$$-\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dQ}{Q}$$

$$-\frac{t}{\tau} + k = \ln Q$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $k = \ln(fC)$

Sostituendo, si ha infine

$$-\frac{t}{\tau} + \ln(fC) = \ln Q$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{Q}{fC}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q}{fC}$$

$$Q = fCe^{-\frac{t}{\tau}}$$

Anche questa funzione è facilmente graficabile con i metodi tradizionali dell'analisi.

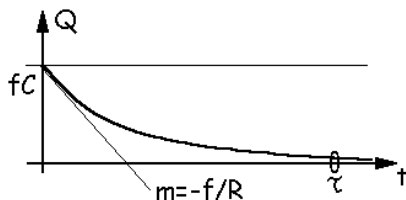
Il limite per t che tende a zero è fC , mentre il limite per t che tende ad infinito è zero.

La derivata della funzione è

$$\frac{dQ}{dt} = i = -\frac{f}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

che è sempre negativa, quindi la funzione non ha massimi e minimi ed è sempre decrescente.

La costante $\tau = RC$ rappresenta il tempo necessario perché la carica Q raggiunga un livello che differisca di un e -esimo dal valore di regime $Q = 0$.



Il magnetismo naturale

La proprietà secondo la quale alcuni minerali hanno la capacità di attirare il ferro è nota, sembra, da prima della nascita di Cristo.

I primi minerali di questo tipo furono rinvenuti a Magnesia (nell'Asia minore) e per questo motivo le calamite naturali furono denominate anche "magneti".

Una barretta di questo materiale ha due polarità opposte, e due barrette messe vicine fra loro, si dispongono in modo che le polarità di tipo opposto si attraggono e invece quelle dello stesso tipo si respingono.

Poiché la Terra nel suo nucleo possiede una gran quantità di questo minerale, si comporta come una grande barretta magnetizzata che tende ad orientare tutte le altre.

Per questo motivo tutti gli aghi magnetici rivolgono la stessa polarità verso il nord geografico. Questa polarità viene quindi denominata "Nord", mentre l'altra viene detta "Sud".

È opportuno notare che non c'è corrispondenza esatta fra i poli geografici e le polarità magnetiche della Terra: c'è uno spostamento che varia lentamente nel tempo.

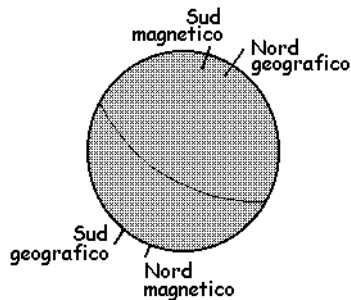
Inoltre nelle vicinanze del polo Nord c'è il Sud magnetico perchè il Nord delle bussole è rivolto sempre verso la polarità magnetica **opposta**.

Suddividendo una barretta di magnetite si ottengono barrette più piccole magnetizzate ma ciascuna con entrambe le polarità.

In altre parole non si riesce a separare le due polarità e ad ottenere un frammento che abbia una sola delle due.

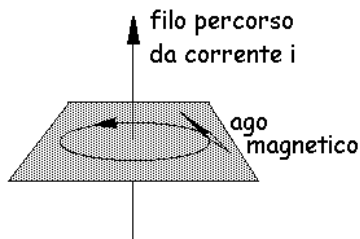
Inoltre alcuni metalli si rivelano sensibili alla magnetite e ne vengono attirati, mentre altri metalli no.

Per molti anni (fino all'inizio del 1800) l'elettricità e il magnetismo furono considerate due parti della fisica indipendenti, fino a quando un fisico danese (Oersted) nel 1820 scoprì una importante connessione fra loro.



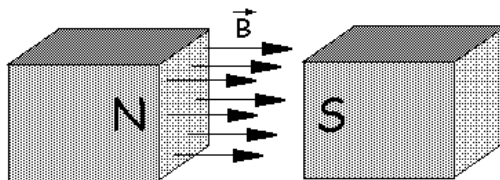
Interazione corrente-magnete

Un ago magnetico, posto nelle vicinanze di un filo rettilineo percorso da corrente elettrica, viene deviato in maniera proporzionale alla corrente e alla sua distanza dal filo, e tende a disporsi come in figura.



Intorno al filo possiamo immaginare infinite circonferenze concentriche (le linee di forza del campo magnetico) e l'ago tende sempre ad essere tangente ad esse.

Il campo magnetico può essere evidenziato (sia nel caso di un magnete che nel caso del filo percorso da corrente), da limatura di ferro: la limatura infatti è formata da una gran quantità di minuscoli aghetti che, per effetto del campo magnetico si magnetizzano anch'essi, e si dispongono tangenzialmente alle linee di forza.

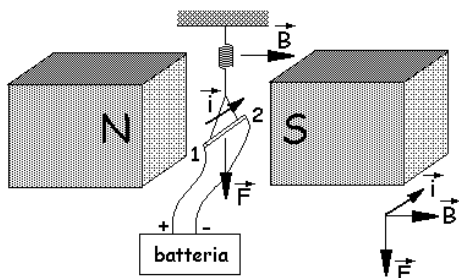


Fra due magneti che presentano le polarità opposte affacciate fra loro, si forma un campo magnetico uniforme con linee di forza parallele fra loro.

L'intensità del campo magnetico si indica con la lettera B , è un vettore che per convenzione è diretto sempre dal polo N a quello S, e potrebbe essere definita in modo analogo al campo gravitazionale e a quello elettrico, prendendo un piccolo magnete di prova (aghetto magnetizzato), misurando in ogni punto dello spazio circostante la forza che provoca la sua **rotazione**, e dividendo poi tale forza per un opportuno magnete unitario.

In realtà però conviene seguire una via diversa sfruttando appunto l'interazione corrente-magnete.

Il campo magnetico



Consideriamo un campo magnetico uniforme. Immergiamo in esso una sbarretta rettilinea (1-2) percorsa da corrente elettrica fornita da una batteria esterna.

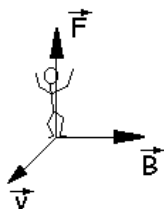
Possiamo constatare che la sbarretta viene sollecitata da una forza F .

Con un dispositivo del tipo illustrato nella figura seguente, si può determinare l'intensità della forza \vec{F} (detta **forza di Lorentz**), con la quale il segmento metallico 1-2 viene attratto verso il basso.

Sperimentalmente si trova che il verso della corrente i , il campo magnetico B e la forza F , sono legati dalla relazione

$$\vec{F} = \vec{i}l \times \vec{B}$$

che può anche essere modificata così



$$\vec{F} = \frac{q}{t} \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q \frac{\vec{l}}{t} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Per determinare la direzione della forza magnetica è opportuno fare riferimento alla figura qui sopra:

il vettore F personificato deve vedere il vettore v (o il vettore i , perché v ed i hanno la stessa direzione in quanto convenzionalmente il verso della corrente corrisponde al verso di spostamento delle cariche positive) **ruotare in verso antiorario per sovrapporsi a B lungo la via più breve.**

La forza di Lorentz non rappresenta un nuovo tipo di forza.

Mentre storicamente l'elettricità e il magnetismo furono considerate parti distinte della fisica, con l'interazione magneti-corrente elettrica si scoprì che il magnetismo ' un particolare effetto delle correnti elettriche.

Dalla formula precedente che esprime la forza di Lorentz, si vede che una particella carica q è soggetta ad una forza magnetica F **solo se la carica è in movimento rispetto al campo magnetico**.

Inoltre tale formula in analogia con quanto detto per il campo gravitazionale e quello elettrico, permette di definire l'intensità di campo magnetico B .

Il campo magnetico B è infatti il rapporto fra la forza che agisce su di essa e il fattore qv (si ricordi infatti che per il campo gravitazionale l'intensità di campo era F/m mentre per il campo elettrico era F/q).

Ma si può definire il campo magnetico anche ricorrendo alla formula

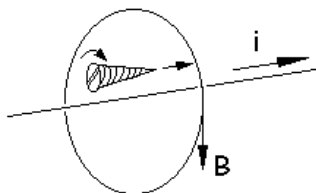
$$\vec{F} = \vec{i}l \times \vec{B}$$

Il campo magnetico B è allora anche il rapporto fra la forza che agisce su una carica in movimento e il fattore il .

L'unità di misura del campo magnetico nel S.I. è infatti espressa in Newton/Ampere metro.

Un filo rettilineo percorso da corrente genera intorno a se un campo magnetico le cui linee di forza sono circonferenze concentriche.

Il verso delle linee di forza è quello della vite che avanza nella direzione della corrente.



Interazione corrente-corrente

Se si hanno due conduttori paralleli percorsi da corrente (concorde) i_1 e i_2 , questi si attraggono reciprocamente con una forza F .

$$F = k \frac{i_1 i_2 l}{d}$$

Sperimentalmente si trova che tale forza è direttamente proporzionale alle correnti elettriche e alla lunghezza l dei conduttori, e

inversamente proporzionale alla loro distanza d .

La costante di proporzionalità k nel S.I. vale $\mu_0/2\pi$ (dove μ_0 si chiama costante di permeabilità magnetica nel vuoto). Quindi la forza con cui si attraggono i due conduttori è

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 l}{d}$$

Questa formula può essere adoperata per definire operativamente l'Ampere: si ha la corrente di un ampere quando entrambe le correnti sono uguali ad i , la

distanza fra i conduttori è di un metro, la loro lunghezza è di un metro e la forza di attrazione è di 2×10^{-7} Newton.

Ovviamente la sezione dei conduttori deve essere piccola mentre la lunghezza dei conduttori deve essere grande.

Se le correnti non sono concordi ma opposte la forza è repulsiva invece che attrattiva.

Leggi di Biot-Savart

Nel caso dei due conduttori paralleli percorsi da corrente abbiamo visto che nel punto P valgono le formule

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 l}{d} = i_2 l B$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_2}{d}$$

(dove la seconda deriva dalla definizione della forza di Lorentz).

Confrontandole fra loro e semplificando, si ha

$$\begin{cases} F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 l}{d} \\ F = i_2 l B \end{cases}$$

o, più semplicemente, considerando un solo conduttore attraversato da corrente i

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{d}$$

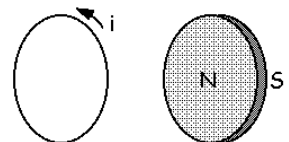
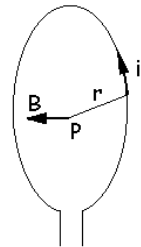
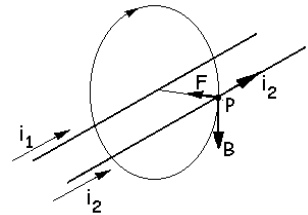
Questa formula esprime la legge di Biot-Savart, e permette di calcolare il campo magnetico generato nelle vicinanze di un conduttore rettilineo.

Si può inoltre dimostrare che se il conduttore è invece una spira di raggio r percorsa da una corrente i , allora il campo magnetico al centro della spira è

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{r}$$

Teorema di equivalenza di Ampère

Una spira percorsa da corrente genera intorno a se un campo magnetico identico a quello che produrrebbe un dischetto magnetizzato con il Nord rivolto dalla



parte che "vede" la corrente ruotare in verso antiorario.

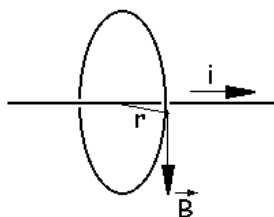
Si chiama **momento magnetico** \vec{m} della spira il prodotto iS della corrente per l'area della spira. È un vettore perpendicolare alla spira, che vede la corrente ruotare in verso antiorario.

Se la spira viene posta in un campo magnetico B esterno ad essa, tende a ruotare e ad allinearsi con B , sotto l'azione di un momento meccanico dato dal prodotto vettoriale

$$\vec{M} = \vec{i}S \times \vec{B}$$

Circuitazione del campo magnetico

Definita l'intensità B del campo magnetico, calcoliamo la circuitazione (per verificare se esso è conservativo).



In modo analogo al campo gravitazionale e a quello elettrico, deve essere il prodotto scalare

$$\sum \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

sempre nullo, qualunque sia la traiettoria chiusa lungo la quale spostiamo la carica esploratrice q .

Consideriamo allora una corrente i che scorre in un conduttore rettilineo generando intorno a se un campo magnetico.

Una carica esploratrice q si muove lungo un percorso circolare di raggio r , come in figura.

Il campo magnetico B è dato dalla legge di Biot-Savart, mentre il dl dopo aver percorso tutta la circonferenza, è $2\pi r$.

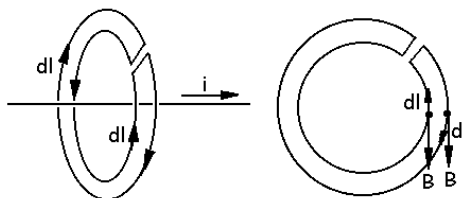
B e dl sono sempre paralleli fra loro, quindi la circuitazione vale

$$\sum \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

Il risultato **non è nullo** e quindi **il campo magnetico non è conservativo**.

Ciò non vuol dire che non possano esistere percorsi chiusi lungo i quali la circuitazione dia risultato nullo: se il percorso **non è concatenato** con il filo percorso da corrente, allora la circuitazione è nulla.

Il campo magnetico comunque non è conservativo perché lo è solo se la circuitazione è nulla per qualunque percorso chiuso.



Per dimostrare questa affermazione consideriamo un percorso **chiuso non concatenato con il conduttore percorso da corrente**, come quello nella figura a fianco.

Nei due percorsi circolari la circuitazione è rispettivamente $\mu_0 i$ (per la crf esterna in quanto l'angolo fra \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ è nullo) e $-\mu_0 i$ (per la crf interna in quanto l'angolo fra \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ è di 180°).

Nei due percorsi rettilinei di collegamento fra le due crf la circuitazione è nulla perché \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ sono invece perpendicolari fra loro.

Sommando tutti e quattro i contributi si ha

$$\mu_0 i - \mu_0 i + 0 + 0 = 0$$

e la circuitazione è nulla. Ma il campo \mathbf{B} comunque non è conservativo.

Il teorema di Gauss per il campo magnetico

Nel campo elettrico \mathbf{E} , come si ricorderà, le linee di forza escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative.

Nel campo magnetico \mathbf{B} ciò non può avvenire perché le linee di forza si richiudono sempre su loro stesse. È una conseguenza del fatto che non possono esistere monopoli magnetici, cioè polarità magnetiche di un solo tipo. Per il campo \mathbf{E} vedemmo che il flusso di \mathbf{E} attraverso una generica superficie solida chiusa, era

$$\Phi(E) = \frac{\sum q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

dove la sommatoria a numeratore rappresenta la somma delle cariche contenute nel solido.

Nel caso in cui il numero delle cariche positive sia uguale al numero delle cariche negative, la sommatoria è nulla ed anche il flusso lo è.

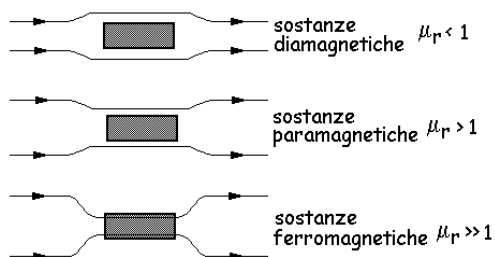
Ebbene, nel caso del flusso di \mathbf{B} attraverso una generica superficie solida chiusa, è

$$\Phi(B) = 0$$

perché assegnando il segno più alle polarità Nord e il segno meno alle polarità Sud (o viceversa), la sommatoria è sempre nulla come conseguenza del fatto che non esistono monopoli magnetici ed il numero di polarità Nord è sempre uguale al numero delle polarità Sud.

La permeabilità magnetica relativa

La presenza della materia modifica la forma delle linee di forza del campo magnetico.



Supponiamo di avere un campo magnetico uniforme \mathbf{B}_0 , nel vuoto, costituito da linee di forza parallele: la presenza di un corpo modifica le linee di forza nel modo seguente

- Le sostanze **diamagnetiche** (acqua, rame, argento, bismuto, ecc) respingono leggermente le linee di forza. Il campo magnetico \mathbf{B} nel loro interno è leggermente inferiore a \mathbf{B}_0 .
- Quelle **paramagnetiche** invece (aria, alluminio, platino, ecc) le attraggono debolmente. Il campo magnetico \mathbf{B} nel loro interno è leggermente superiore a \mathbf{B}_0 .
- Quelle **ferromagnetiche** infine (ferro, cobalto, nichel) le attraggono fortemente. Il campo magnetico \mathbf{B} nel loro interno è molto superiore a \mathbf{B}_0 .

Vale in ogni caso la relazione

$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{B}_0$$

E la costante μ_r (caratteristica di ogni corpo) prende il nome di **permeabilità magnetica** del mezzo.

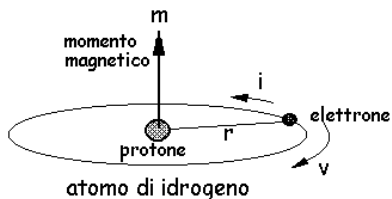
Perché le calamite attraggono alcuni metalli

Consideriamo un atomo, e fra essi il più semplice: l'atomo di idrogeno.

L'elettrone che gira intorno al nucleo costituisce una piccolissima spira in cui passa una corrente piuttosto elevata.

Poiché l'elettrone è carico negativamente, la corrente avrà verso contrario al movimento dell'elettrone.

Per il principio di equivalenza di Ampere l'atomo si comporta come un magnete con momento magnetico



$$m = iS = \frac{e}{T} S$$

che viene detto **magnetone di Bohr**.

Anche per gli atomi più complessi avviene la stessa cosa: ogni elettrone genera un minuscolo campo magnetico, con un proprio momento magnetico.

Ebbene, alcune sostanze hanno elettroni che generano momenti magnetici uguali ed opposti, e il momento magnetico totale è nullo.

Le sostanze di questo tipo sono quelle **diamagnetiche**.

Altre sostanze, per ragioni di non completa simmetria come le precedenti, hanno un debole momento magnetico totale e sotto l'azione di un campo magnetico esterno B , tendono a ruotare e ad allinearsi ad esso. Ma eliminando il campo B ritornano nella posizione iniziale.

Sono queste le sostanze **paramagnetiche**.

Altre sostanze infine hanno un momento magnetico totale piuttosto alto ed inoltre sono abbastanza "legate" fra loro. Sotto l'azione di un campo magnetico esterno si allineano ad esso e rimangono ferme in tale posizione anche dopo che il campo esterno viene eliminato.

Queste ultime sono le sostanze **ferromagnetiche**.

Una barretta di ferro comune non è magnetizzata: gli atomi che la costituiscono sono come una gran quantità di monetine magnetiche messe in un baule alla rinfusa: il campo magnetico totale da loro generato si compensa nel senso che per un certo numero di monetine orientate con la "testa" in una certa direzione, ce ne sono circa altrettante che hanno la "testa" nella direzione opposta.

Se però mettiamo nelle vicinanze del baule un grosso magnete, le monetine ruotano e si orientano tutte con la "testa" in una stessa direzione, e rimangono intrappolate in tale direzione anche se il magnete esterno viene tolto.

Infatti se lasciamo uno spillo attaccato ad una calamita, dopo un certo tempo anche lo spillo diventa magnetizzato.

Si può ottenere lo stesso risultato anche mettendo lo spillo, o un cacciavite, al centro di una spira nella quale facciamo passare per un certo tempo una corrente molto intensa: il campo magnetico generato dalla corrente orienterà tutti gli atomi dello spillo o del cacciavite in unica direzione.

Se però un magnete viene scaldato al di sopra di una certa temperatura (detta temperatura di Curie), l'agitazione termica rende liberi gli atomi che si dispongono in maniera caotica in tutte le direzioni, e le proprietà magnetiche scompaiono definitivamente.

Le sostanze diamagnetiche vengono leggermente respinte da una calamita. Quelle paramagnetiche invece subiscono un parziale allineamento che però

perdono subito non appena viene allontanata la sorgente del campo magnetico esterno.

Orbite circolari

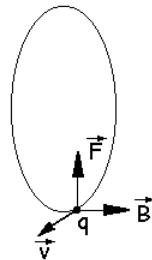
Dalla cinematica sappiamo che se un corpo è sottoposto ad una forza costante **lungo la direzione del moto**, si muove con **moto rettilineo uniformemente accelerato**.

Se invece è sottoposto ad una forza costante **perpendicolare alla direzione del moto**, si muove con **moto circolare uniforme**.

Bene, nella figura a fianco la particella con carica positiva q si muove con velocità v perpendicolare a B .

Si ha una forza costantemente perpendicolare a v e quindi il moto è circolare uniforme di raggio r .

Calcoliamo il raggio mettendo a confronto la forza di Lorentz con la forza centripeta.



$$\begin{cases} f = qvB \\ f = m \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

$$qB = m \frac{v}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

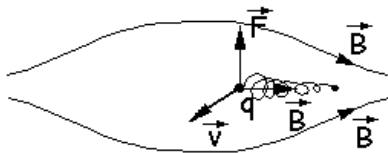
da cui si vede che il raggio della circonferenza rimane costante se B è costante, ma **se B aumenta, il raggio diventa più piccolo**.

Un campo magnetico può essere usato, proprio sfruttando queste proprietà, per realizzare una **bottiglia magnetica**, un contenitore invisibile ma l'unico per esempio in grado di contenere il **plasma** (gas ad altissima temperatura, milioni di gradi centigradi, privato dei propri elettroni ed in grado di innescare la reazione di fusione).

Il plasma non è stato ancora realizzato in modo controllato, ma già sappiamo che nessun materiale riuscirà mai a sopportare tale enorme temperatura: esso potrà essere contenuto soltanto in una bottiglia magnetica.

Le due linee di forza nella figura rappresentano l'andamento del campo magnetico della bottiglia.

Una generica particella carica positivamente avrà una velocità v arbitraria. Scomponiamo tale velocità in due componenti (una parallela a B ed una normale a B).



La componente normale, per quanto detto in precedenza, provocherà un moto circolare di raggio opportuno.

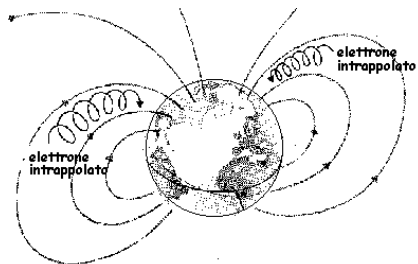
La componente parallela invece sposta lateralmente la particella facendogli percorrere una traiettoria a spirale.

Inoltre, man mano che la particella si avvicina al collo destro della bottiglia, il raggio delle circonferenze diminuisce perché il campo B diventa più intenso.

Le particelle cariche negativamente avranno lo stesso movimento verso sinistra invece che verso destra.

Le particelle restano quindi confinate nella bottiglia senza avere la possibilità di uscire da essa. La bottiglia avrebbe però bisogno di due “tappi” per impedire l’uscita delle particelle cariche dai colli laterali.

Il problema si risolve semplicemente curvando la bottiglia fino a richiuderla su se stessa: in altre parole basta formare una bottiglia avente la forma di un anello.



Bottiglie magnetiche con tale forma sono state costruite in tutti i laboratori in cui si cerca di produrre la fusione controllata, e prende il nome di “Tokamak”.

Intorno alla terra ci sono campi magnetici aventi la forma di bottiglia magnetica (Le famose fasce di Van Allen), che catturano gli elettroni generati dai raggi cosmici diretti verso la

terra e li convogliano verso il Nord geografico generando le famose aurore boreali.

Correnti indotte

Si abbia un campo magnetico uniforme, ed immaginiamo di spostare una sbarretta metallica come è indicato in figura.

Per effetto dello spostamento le particelle positive contenute nella sbarretta si muovono con velocità v in un campo magnetico B .

Su di esse agisce allora la forza di Lorentz che è diretta lungo la sbarretta e che genera una corrente elettrica, detta **corrente indotta** (in quanto generata, indotta dallo spostamento meccanico).

Lo stesso effetto si manifesta anche sulle particelle negative (gli elettroni) ma il verso della forza sarà ovviamente quello opposto.

Quindi **uno spostamento meccanico** provoca un effetto elettrico, **una corrente elettrica**.

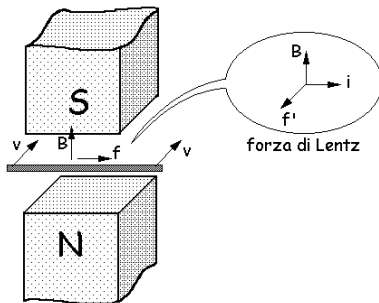
Come è indicato nella nuvoletta in figura, si genera anche un effetto secondario molto importante: la corrente elettrica i equivale ancora allo spostamento di cariche positive e la loro velocità di spostamento combinata con il campo magnetico genera ancora una nuova forza f' (più debole della precedente) che tende a contrastare il movimento con cui la sbarretta viene introdotta nel campo magnetico.

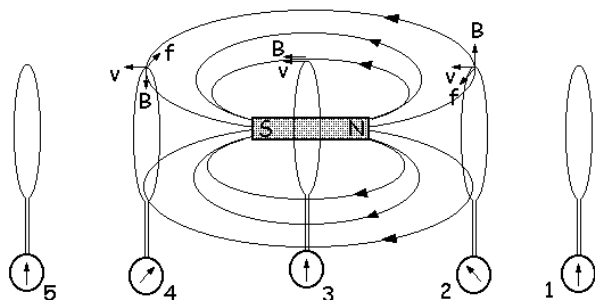
Questo effetto va sotto il nome di **legge di Lentz** e si verifica ogni volta che si produce una corrente indotta.

Si può descrivere tale effetto semplicemente affermando che **ogni corrente indotta produce effetti che tendono a contrastare la causa che l'ha generata**.

In altre parole più rapidamente cerchiamo di introdurre (o estrarre) la sbarretta nel campo magnetico, e più forte avvertiremo un ostacolo alla realizzazione del movimento.

Ma la corrente indotta può essere prodotta anche in altri modi.





Si abbia una barretta magnetizzata e muoviamo una spira da sinistra a destra (come in figura) con velocità v .

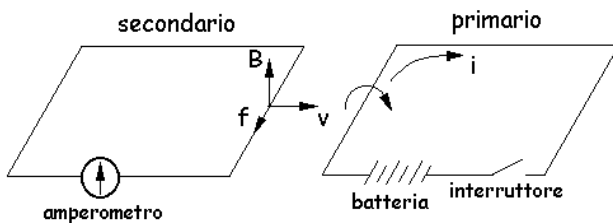
Le estremità della spira sono collegate con uno strumento di misura che permette di leggere la corrente indotta che circola nella spira. Lo strumento è del tipo a zero centrale, in modo che quando la posizione dell'ago è centrale sappiamo che nella spira non passa corrente, ma se l'ago si sposta verso destra o verso sinistra sapremo anche qual è il verso con cui la corrente passa nella spira.

Nella posizione 1 non passa alcuna corrente nella spira, ma nella posizione 2 si ha una corrente indotta in seguito alla posizione normale fra v e B .

Nella posizione 3 la corrente indotta si annulla perché v e B sono paralleli.

Nella posizione 4 si ha nuovamente una corrente indotta perché v e B tornano ad essere perpendicolari fra loro (ma il verso di f e quindi della corrente indotta è opposto a quello che si aveva nella posizione 2).

Infine nella posizione 5 la corrente indotta torna a zero.



Si avrebbe avuto lo stesso identico effetto se invece di muovere la spira, l'avessimo tenuta ferma e avessimo invece spostato il magnete: quello che importa è il movimento reciproco fra spira e campo magnetico.

Si può infine creare una corrente indotta anche in un terzo modo, senza che ci sia alcuno spostamento meccanico.

Si abbiano due circuiti separati, indipendenti, ma vicini fra loro, come indicato in figura, e chiamiamoli primario e secondario.

Nel primario c'è una batteria ed un interruttore, mentre nel secondario c'è solo uno strumento di misura per rilevare la presenza della corrente indotta.

Se, partendo dalla posizione con interruttore aperto, ad un certo istante lo chiudiamo, nel primario passa una corrente che “in un certo intervallo di tempo” passa da zero ad un valore i di regime.

Questa corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico la cui intensità varia in tale intervallo di tempo da zero ad un opportuno valore di B regime.

Ebbene, per le particelle positive presenti nella parte di circuito secondario più vicina al primario, è come se un campo magnetico costante B stesse avvicinandosi con velocità v (oppure, è la stessa cosa, è come se il campo magnetico B fosse fermo e le particelle stessero avvicinandosi con velocità v).

La combinazione di v e B genera una forza f e quindi una corrente indotta.

Tale corrente dura però soltanto nel breve intervallo che intercorre fra l'istante di chiusura dell'interruttore e il raggiungimento della corrente di regime.

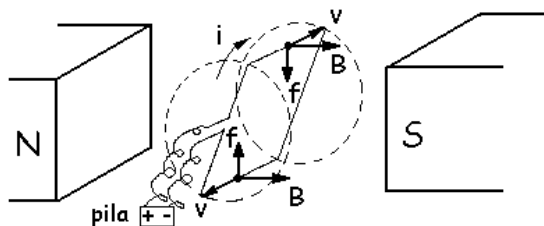
Si avrà nel secondario una corrente indotta di verso opposto se riapriamo l'interruttore, ma anche questa durerà soltanto il breve intervallo necessario alla corrente per passare dal valore di regime a zero.

In questo terzo caso abbiamo prodotto una corrente indotta senza effettuare alcuno spostamento meccanico.

Cosa è allora che provoca una corrente indotta ?

Si ha una corrente indotta ogni volta che un campo magnetico B varia nel tempo.

Momento torcente di una spira in un campo magnetico



Si abbia ora una spira percorsa da una corrente i (generata da una batteria esterna), ed immersa in un campo magnetico costante B .

La spira è rettangolare (solo per ragioni di semplicità) con lati di lunghezza a e b .

Sui due lati orizzontali a si generano due forze uguali ed opposte che costituiscono **una coppia**, e questa coppia tende a far ruotare la spira.

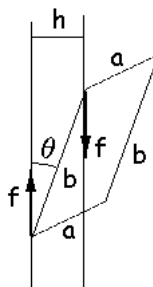
Sui altri due lati si generano invece forze uguali e contrarie che tendono a deformare la spira ma non a farla ruotare (perché le due forze si trovano sulla stessa retta di applicazione).

Il **momento torcente** della coppia è

$$\begin{aligned} M &= fh = fbsen\theta = qvBbsen\theta = \\ &= q\frac{a}{t}Bbsen\theta = \frac{q}{t}abBsen\theta = \\ &= iSBsen\theta = mBsen\theta \end{aligned}$$

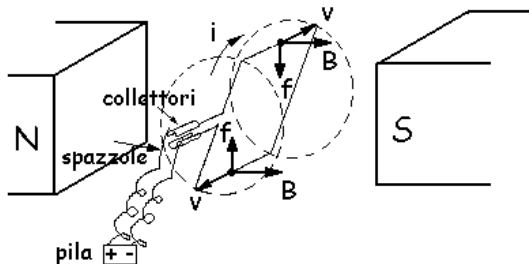
dove $m = iS$ prende il nome di **momento magnetico** della spira.

Quindi una spira percorsa da corrente, in un campo magnetico è soggetta ad un momento torcente che tende a farla ruotare (di circa mezzo giro, fino a quando le due rette di applicazione coincidono, e le due forze formano una coppia di momento nullo).



Il motore elettrico

La spira vista precedentemente esegue una rotazione parziale e poi si ferma.



Ma se colleghiamo le due estremità della spira a due semianelli metallici (detti **collettori**) che ruotano insieme alla spira, e disponiamo due contatti striscianti (detti **spazzole**) come è indicato in figura, allora la spira seguita a girare continuamente realizzando un motore elettrico, cioè un dispositivo che trasforma l'energia elettrica della batteria in una rotazione e quindi in un movimento meccanico.

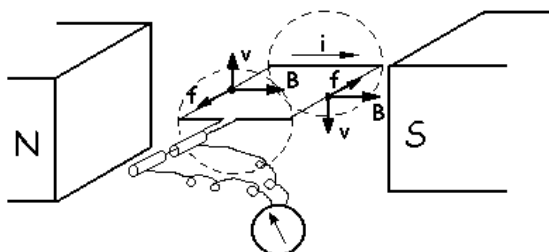
Infatti perché la rotazione non si fermi come nel caso precedente, occorre che il lato superiore della spira sia percorso da corrente elettrica che abbia sempre lo stesso verso (e altrettanto per il lato inferiore).

È quindi necessario che le estremità della spira siano collegate ciclicamente prima ad un polo della pila e poi all'altro.

Questa commutazione avviene proprio grazie alle spazzole che toccano alternativamente prima uno e poi l'altro collettore.

L'alternatore

Nei due paragrafi precedenti abbiamo visto come una corrente elettrica possa essere trasformata in un movimento meccanico.



È possibile però ottenere anche il processo inverso: la trasformazione di un movimento meccanico (una rotazione) in una corrente elettrica.

Si abbia quindi una spira immersa in un campo magnetico, e immaginiamo di ruotarla (per esempio con una manovella che non è rappresentata nella figura), e colleghiamo i due estremi della spira con due cilindri (collettori) e con due contatti striscianti (spazzole).

La rotazione della spira avvenga in verso orario, come indicato in figura.

Si svilupperanno delle forze magnetiche che indurranno una corrente i che sarà evidenziata dallo strumento di misura.

Ma dopo mezzo giro i due lati a destra e sinistra si saranno scambiati fra loro e in ciascuno di essi la forza inverte il verso.

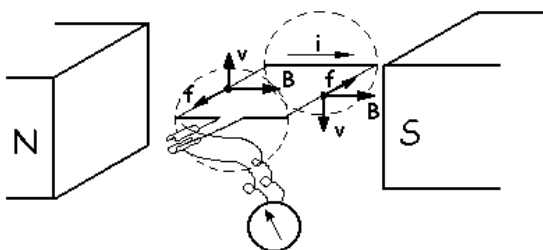
Si noti ogni spazzola è collegata sempre alla stessa estremità della spira.

Come risultato nella spira passa corrente in un verso (per mezzo giro) e nel verso opposto (per l'altro mezzo giro): cioè **una corrente alternata**, e lo strumento mostrerà il proprio ago oscillante alternativamente a destra e a sinistra.

Generatore di corrente pulsante

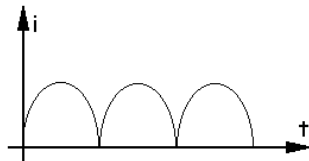
Modificando i collettori come indicato a fianco, ogni spazzola resta collegata ad una estremità della spira solo per mezzo giro.

Quando nella spira il verso della corrente si inverte, anche il collettore inverte

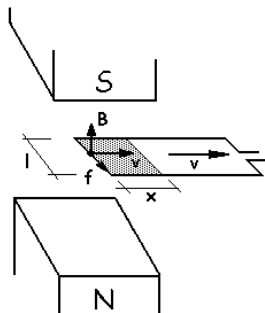


il contatto con l'altra spazzola, ed il risultato è che lo strumento indicatore mostra una corrente che ha sempre lo stesso verso.

Però questa corrente non è costante, ma passa ciclicamente da un valore massimo a zero: si ha in altre parole **una corrente pulsante**.



Legge di Faraday–Newmann



Si abbia una spira parzialmente immersa in un campo magnetico e immaginiamo di spostarla lateralmente con velocità v , estraendola dal campo.

Il rettangolo ombreggiato avente lati l ed x , è la parte di spira immersa nel campo magnetico.

Le cariche positive contenute nella spira, nel lato l , saranno sollecitate da una forza f che genera una corrente indotta.

La spira deve essere immersa solo parzialmente nel campo magnetico perché in caso contrario sul lato opposto si sviluppa una forza cge si contrappone

esattamente alla precedente, annullando la corrente indotta.

Il lavoro eseguito per spostare le cariche lungo il lato l è

$$L = f \cdot l = qvBl$$

e, dividendo per q , si ha

$$\frac{L}{q} = V = vBl$$

Ma il flusso che attraversa la superficie ombreggiata è

$$\Phi = BS = Blx$$

Derivando rispetto alla variabile x , si ha

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

Dove il segno meno è dovuto al fatto che al crescere di t la x diminuisce: la funzione è decrescente e quindi la derivata è negativa.

Confrontando fra loro le due relazioni in cornice, si ha

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = -V}$$

Ciò ogni variazione del flusso di B nel tempo genera una differenza di potenziale V e quindi una corrente indotta.

Correnti alternate

Si abbia una spira che ruota in un campo magnetico (come nell'alternatore). Per la legge di Faraday-Newmann si ha

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \alpha) = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = \omega BS \sin \omega t = V_0 \sin \omega t$$

dove $V_0 = \omega BS = \text{costante}$

Dunque nella spira scorre una corrente alternata il cui valore in funzione del tempo è

$$V = V_0 \sin \omega t$$

Applicando la legge di Ohm al primo membro si avrebbe

$$iR = V_0 \sin \omega t$$

$$i = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = i_0 \sin \omega t$$

In realtà però, in un circuito reale, si può constatare che la sinusoide della corrente in funzione del tempo è sempre leggermente in ritardo rispetto alla sinusoide della tensione.

Questo ritardo ϕ viene detto **sfasamento** ed è dovuto alla presenza delle capacità nel circuito (vedi dopo).

Quindi in realtà dobbiamo scrivere per la corrente

$$i = i_0 \sin(\omega t - \Phi)$$

I valori efficaci

L'effetto Joule: $L = i^2 Rt$ rappresenta il riscaldamento prodotto dal passaggio di una corrente continua i in un conduttore (per passare dal lavoro L alla quantità di calore Q basta dividere i due membri per l'equivalente meccanico della caloria J).

Se in un circuito passa corrente alternata invece che continua, si produce riscaldamento, e vale la stessa formula?

La risposta alla prima domanda è affermativa: non si pensi che grazie al fatto che la corrente circola prima in un verso e poi nel verso opposto, gli effetti termici che essa provoca si annullino. Basta osservare che nella formula dell'effetto Joule la corrente è elevata al quadrato e quindi il suo verso (positivo o negativo) non produce effetti diversi.

Ma la formula dell'effetto Joule rimane invariata ?

Prima di rispondere osserviamo che in un tempuscolo dt la corrente può essere considerata costante, e quindi la legge precedente può essere considerata valida in tale tempuscolo.

Differenziando la legge si ha

$$dL = i^2 R dt$$

Sostituendo l'espressione ricavata nel paragrafo precedente, avremo

$$dL = (i_0 \text{sen} \omega t)^2 R dt = i_0^2 R \text{sen}^2(\omega t) dt$$

Integriamo ambo i membri in un ciclo completo (fra 0 e T)

$$L = \int_0^T i_0^2 R \text{sen}^2(\omega t) dt = i_0^2 R \int_0^T \text{sen}^2(\omega t) dt$$

L'integrale si può risolvere per sostituzione ponendo $\alpha = \omega t$

$$L = \frac{i_0^2 R}{\omega} \int_0^{\omega T} \text{sen}^2 \alpha d\alpha = \frac{i_0^2 R}{\omega} \left[\frac{2\alpha - \text{sen}(2\alpha)}{4} \right]_0^{\omega T} = \frac{i_0^2 R}{2} T$$

Confrontiamo questo risultato con quello valido per la corrente continua

$$i^2 RT = \frac{i_0^2 R}{2} T$$

Semplificando si ottiene

$$i = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Questo valore (che prende il nome di **valore efficace** della corrente alternata e si indica anche con il simbolo i_{eff}) corrisponde al valore massimo i_0 (o di picco, come si suol dire) della corrente alternata, diviso per la radice di due.

Rappresenta **il valore che dovrebbe avere una corrente continua per produrre la stessa quantità di calore di quella alternata.**

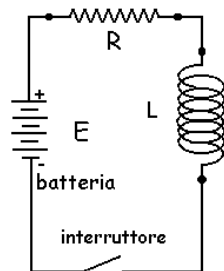
Moltiplicando per R ambo i membri si ottiene

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

che è il **valore efficace della tensione.**

L'autoinduzione

Si abbia un circuito contenente una bobina L (cioè un conduttore avvolto in modo da formare una spirale), una batteria a corrente continua con f.e.m. (forza elettromotrice, cioè tensione a circuito aperto) f , una resistenza R per impedire il corto circuito e limitare il



valore della corrente circolante nel circuito, ed un interruttore.

Supponiamo di chiudere l'interruttore: la corrente comincia a circolare nel circuito ma ci vorrà un certo intervallo di tempo (anche se piccolo) perchè la corrente passi da zero al valore di regime.

È un effetto paragonabile a quello di un volano: ci vuole un certo tempo per portarlo ad un determinato numero di giri al secondo, e ci vuole altrettanto tempo per fermarlo.

Nel caso della bobina questo effetto è dovuto alla legge di Lenz: la corrente crea un campo magnetico (variabile nel tempo) intorno alla bobina, nel circuito si genera una corrente indotta e questa tende ad opporsi alla causa che l'ha generata rallentando il passaggio della corrente.

Lo stesso effetto si ha quando l'interruttore viene aperto.

Questo fenomeno si chiama **autoinduzione** perché la corrente che passa nella bobina produce effetti induttivi sulla bobina stessa e non in un altro circuito secondario.

Ora affrontiamo il problema studiandolo più in dettaglio: il flusso concatenato con le spire della bobina è proporzionale alla corrente che circola in essa

$$\Phi = Li$$

dove L è la costante di proporzionalità che prende il nome di **induttanza**, dipende dalla struttura geometrica, dal numero di spire e viene determinata sperimentalmente.

Derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$
$$f = -L \frac{di}{dt}$$

dove f è la f.e.m. autoindotta.

Circuito RL in chiusura

Nel circuito precedente immaginiamo di chiudere in un certo istante l'interruttore: nell'istante $t = 0$ si ha nel circuito una corrente $I = 0$ (e queste rappresentano le cosiddette **condizioni iniziali** del circuito).

Una volta chiuso l'interruttore si hanno due d.d.p. (quella dovuta alla batteria e quella dovuta alla presenza della f.e.m. indotta) ed una corrente (variabile, almeno nella situazione transiente) che deve rispettare la legge di Ohm. Cioè

$$E + f = Ri$$

Sostituendo l'espressione ricavata precedentemente, avremo

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri$$

Questa rappresenta una equazione differenziale (per la presenza dei differenziali di i e dt), ma è di facile soluzione. Si ottiene

$$E - Ri = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{dt}{L} = \frac{di}{E - Ri} \quad (\text{moltiplico per } -R)$$

$$-\frac{R}{L} dt = \frac{-R di}{E - Ri}$$

Ora, integrando ambo i membri,

$$\int -\frac{R}{L} dt = \int \frac{-R}{E - Ri} di$$

$$-\frac{R}{L} t + K = \ln(E - Ri)$$

$$e^{-\frac{R}{L} t + K} = E - Ri$$

Questa espressione è una “famiglia di funzioni” a causa del parametro K scaturito dalla integrazione indeterminata.

Il parametro K può essere calcolato imponendo le condizioni iniziali, cioè imponendo che la funzione passi per il punto ($t = 0$; $i = 0$). Si ottiene

$$e^K = E$$

e perciò

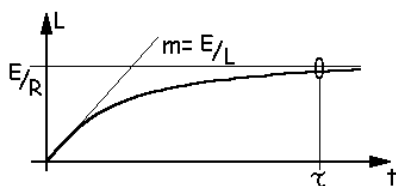
$$e^{-\frac{R}{L} t} E = E - Ri$$

$$Ri = E \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

Questa funzione rappresenta l'andamento della corrente nel circuito in funzione del tempo.

Studiandola con l'analisi matematica si può constatare che è una funzione che passa per l'origine, il limite per t che tende



ad infinito è E/R , la derivata è

$$i' = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

sempre positiva, e quindi la funzione è sempre crescente.

Il rapporto R/L prende anche il nome di τ e rappresenta il tempo necessario perché la funzione raggiunga il valore di regime E/R a meno di un e -esimo.

Il grafico della funzione (nel transitorio) è quello indicato nella figura a fianco.

Circuito RL in apertura

Analizziamo ora il comportamento del circuito RL nel transiente che va dall'istante in cui apriamo l'interruttore all'istante in cui la corrente va a zero.

Questa volta le condizioni iniziali sono $t = 0 \quad I = E/R$.

Una volta aperto l'interruttore l'unica d.d.p. è quella dovuta alla presenza della f.e.m. indotta, mentre la corrente come in precedenza deve rispettare la legge di Ohm. Si ha cioè

$$-L \frac{di}{dt} = Ri$$

Semplificando e integrando

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt$$

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$K = \ln\left(\frac{E}{R}\right)$$

Sostituendo si ha

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln\left(\frac{E}{R}\right)$$

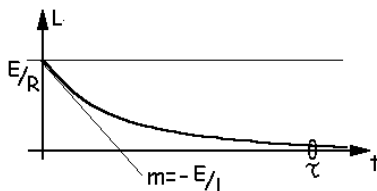
$$\ln i - \ln\left(\frac{E}{R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln \frac{i}{E/R} = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln \left(\frac{iR}{E} \right) = -\frac{R}{L}t$$

$$e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{iR}{E}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



Anche questa funzione può essere studiata con l'analisi e graficata.
 La derivata è

$$i' = -\frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

ed è sempre negativa, quindi la funzione da graficare è sempre decrescente.
 Il limite per t che tende ad infinito è zero.

Il significato di τ è simile a quello precedente: è il tempo necessario perché la corrente si riduca ad un e -esimo del valore di regime.

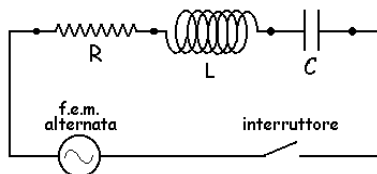
L'impedenza

Si abbia ora un circuito (che chiameremo brevemente circuito RLC) in cui siano presenti sia un condensatore che una resistenza ed una bobina.

Supponiamo anche che in esso ci sia un generatore di corrente alternata (se usassimo una batteria si avrebbe il passaggio di corrente solo nei brevi intervalli transienti in cui chiudiamo o apriamo l'interruttore, perché il condensatore impedisce il passaggio della corrente e si avrà corrente solo nelle fasi di carica o di scarica delle armature del condensatore).

Ma come si comporta il circuito sottoposto ad una corrente alternata ?

La bobina abbiamo visto che provoca un "effetto volano" producendo dei ritardi



dell'ordine della costante τ .

Il condensatore invece agisce in modo diverso: intanto **non impedisce più il passaggio della corrente** perché a causa del continuo variare della corrente alternata le armature del condensatore sono continuamente in fase di carica e di scarica, sono cioè continuamente sotto quello che prima avevamo denominato "regime transitorio".

Inoltre il condensatore **produce uno "sfasamento"** (cioè un ritardo) fra corrente e tensione:

$$\begin{cases} v = v_0 \text{sen}(\omega t) \\ i = i_0 \text{sen}(\omega t - \Phi) \end{cases}$$

Si può dimostrare (anche se non lo facciamo), che tale sfasamento vale

$$\tan \Phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Inoltre si può definire una nuova grandezza chiamata **impedenza**, equivalente a

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

che ha le dimensioni di una resistenza e permette di mettere in relazione la corrente e la tensione "di picco" (cioè i loro valori massimi) con l'espressione

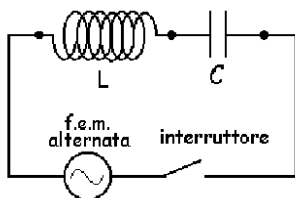
$$v_0 = i_0 z$$

equivalente alla legge di Ohm. Per questo motivo l'impedenza viene anche detta **resistenza complessa**.

Del resto se nel circuito togliamo la bobina ($L = 0$) e il condensatore ($C = \infty$), perché avvicinando fra loro le armature di un condensatore la capacità aumenta, e quando queste si toccano il condensatore non esiste più e si può considerare infinita la sua capacità), l'impedenza z si riduce semplicemente alla resistenza R .

Circuito risonante LC

A questo punto occorre osservare una cosa molto importante: l'impedenza di un circuito (cioè la resistenza offerta al passaggio della corrente) può essere anche se esso contiene elementi come condensatore ed una capacità.



nulla
un

Si abbia un circuito LC (cioè come il precedente ma senza la resistenza R) e un generatore di corrente alternata.

Poiché manca la resistenza, la sua impedenza è

$$z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Imponendo che si annulli, si ricava

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

E quindi

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Cioè esiste una opportuna frequenza del generatore (detta **frequenza di risonanza**) alla quale il circuito presenta resistenza nulla.

Questo circuito (senza interruttore e senza generatore) e questa proprietà vengono sfruttati nei trasmettitori e ricevitori di ogni tipo per produrre e catturare le onde elettromagnetiche e permettere quindi le comunicazioni radio, tv, radar, ecc.

La potenza di una corrente alternata

Trattando l'effetto Joule avevamo visto che il lavoro legato al passaggio della corrente stessa era

$$L = i^2 R t = \frac{v^2}{R} t = v i t$$

Cosa avviene invece al passaggio di una corrente alternata ?

In un intervallo di tempo sufficientemente piccolo il lavoro può essere espresso da una legge identica a quella per la corrente continua, e si ha

$$dL = v i dt$$

Sostituendo i valori della tensione e della corrente, avremo

$$dL = v_0 \text{sen}(\omega t) i_0 \text{sen}(\omega t - \Phi) dt$$

Integriamo ora i due membri in un ciclo completo (fra 0 e T)

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^T v_0 \text{sen}(\omega t) i_0 \text{sen}(\omega t - \Phi) dt = \\
 &= v_0 i_0 \int_0^T \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega t - \Phi) dt = \\
 &= v_0 i_0 \int_0^T \text{sen}(\omega t) [\text{sen}(\omega t) \cos \Phi - \cos(\omega t) \text{sen} \Phi] dt = \\
 &= v_0 i_0 \cos \Phi \int_0^T \text{sen}^2(\omega t) dt - v_0 i_0 \text{sen} \Phi \int_0^T \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) dt
 \end{aligned}$$

Si può verificare facilmente che mentre il secondo integrale è nullo, il primo vale $T/2$. E quindi avremo

$$L = v_0 i_0 \cos \Phi \frac{T}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cos \Phi T$$

Dividendo per il tempo T il lavoro si trasforma nella potenza

$$P = \frac{L}{T} = v_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \Phi$$

Perciò la potenza collegata al passaggio di una corrente alternata in un circuito è uguale al prodotto della tensione efficace per la corrente efficace, moltiplicata per il coseno dello sfasamento (che viene anche detto **fattore di potenza**).

La presenza di un condensatore in un circuito dove passa una corrente alternata, abbiamo visto che provoca un certo sfasamento (cioè un aumento di Φ) e quindi una diminuzione della potenza consumata.

È ciò che avviene per esempio nei tubi al neon per illuminazione: è risaputo che consumano meno di una analoga lampada ad incandescenza, ed è proprio per tale ragione.

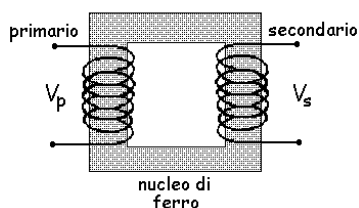
Se infine lo sfasamento raggiunge il valore di 90° , allora il coseno si annulla, la potenza consumata scende a zero e la corrente si dice **swattata**.

I trasformatori

Sono costituiti da due bobine separate denominate rispettivamente circuito primario e circuito secondario.

Il numero delle spire, il diametro del filo, il raggio possono variare dal primario al secondario.

Normalmente le bobine vengono avvolte intorno ad un nucleo di ferro che ha le funzioni di catturare il maggior numero possibile di linee di forza e fare in modo che



tali linee siano concatenate sia con le spire del primario che con quelle del secondario.

In tal modo il flusso concatenato con le spire è sempre massimo.

Per semplicità immaginiamo che le spire siano tutte uguali e differiscano solo nel loro numero: n_p è il numero di quelle del primario e n_s il numero di quelle del secondario.

Applichiamo ora ai capi del primario una d.d.p. alternata v_p e andiamo a misurare la d.d.p. v_s ai capi del secondario.

Il campo magnetico prodotto dalla bobina del primario varia continuamente nel tempo perché la tensione è alternata. Nel secondario si ha quindi una d.d.p. indotta.

Il campo magnetico B che attraversa il primario è uguale a quello del secondario per la presenza del nucleo di ferro.

Si ha

$$\begin{cases} \Phi_p = n_p BS \\ \Phi_s = n_s BS \end{cases}$$

dove S è la superficie delle spire. Deriviamo

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_p}{dt} = -v_p = n_p S \frac{dB}{dt} \\ \frac{d\Phi_s}{dt} = -v_s = n_s S \frac{dB}{dt} \end{cases}$$

E dividiamo membro a membro

$$\boxed{\frac{v_p}{v_s} = \frac{n_p}{n_s}}$$

Otteniamo dunque come risultato che il rapporto fra le d.d.p. è uguale al rapporto fra il numero di spire.

Perciò se il primario ha un numero di spire 100 volte maggiore di quello del secondario, anche la tensione al secondario sarà 100 volte maggiore di quella del primario.

Il trasformatore permette dunque di “trasformare” la tensione elevandola o abbassandola a volontà variando il rapporto fra il numero di spire.

Ha un rendimento quasi perfetto molto vicino al 100%. Le uniche dispersioni di energia sono dovute alla presenza di correnti indotte che si generano nel nucleo di ferro (dette **correnti parassite** o di **Focault**).

Queste però possono essere minimizzate realizzando il nucleo di ferro non con un blocco unico, ma con lamierini sovrapposti che ostacolano il percorso delle correnti parassite.

Un trasformatore ovviamente funziona solo se nel primario è introdotta una tensione alternata.

Il trasporto dell'energia elettrica

In un trasformatore la potenza impegnata nel primario corrisponde a quella del secondario.

Quindi il prodotto tensione corrente del primario è uguale al prodotto tensione corrente del secondario, cioè

$$v_p i_p = v_s i_s$$

$$\frac{v_p}{v_s} = \frac{i_s}{i_p}$$

Il rapporto è invertito, cioè se la tensione del secondario è per esempio 100 volte maggiore di quella del primario, la corrente al contrario è 100 volte più piccola: ad una tensione maggiore corrisponde una corrente minore.

Questa prerogativa è estremamente utile per il trasporto dell'energia dal luogo di produzione (una centrale elettrica, di qualunque tipo) ai luoghi di utilizzazione.

Infatti dalla centrale partono cavi che devono trasportare una energia elettrica di enorme potenza. Per effetto Joule (che, ricordiamolo, è proporzionale al quadrato della corrente) questi cavi si riscalderebbero al punto tale da fondere immediatamente senza permettere il trasporto dell'energia elettrica.

Grazie al fatto che la tensione è alternata vengono utilizzati dei trasformatori che aumentano enormemente il valore della tensione (fino a centinaia di migliaia di volts, e proprio per questo vengono detti cavi ad alta tensione) abbassando quindi di conseguenza il valore della corrente che li attraversa.

Si riduce allora il calore prodotto per effetto Joule, e l'energia può essere trasportata con una perdita per calore ragionevolmente sopportabile.

Chiaramente la tensione, giunta nei luoghi di utilizzazione, deve essere opportunamente riportata ai valori standard (220 volts) in apposite cabine di trasformazione con altri trasformatori che eseguono il procedimento inverso.

Le equazioni di Maxwell

Maxwell riuscì a sintetizzare tutto l'elettromagnetismo in quattro leggi fondamentali: tutti i fenomeni fisici possono essere interpretati ricorrendo a queste leggi fondamentali. Possono essere paragonate alle tre leggi di Newton che compendiano e possono spiegare tutti i fenomeni della meccanica.

Esse sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(E) = \frac{\sum q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \Phi(B) = 0 \\ C(E) = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \\ C(B) = \mu_0 \mu_r \left(i + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\Phi(E)}{dt} \right) \end{array} \right.$$

Le prime due rappresentano il teorema di Gauss applicato al campo elettrico ed a quello magnetico.

La terza rappresenta la legge di Faraday-Newmann: ogni variazione del campo magnetico nel tempo produce una tensione indotta.

L'ultima infine (cui accenniamo appena), indica che un campo elettrico variabile nel tempo produce effetti magnetici, ma questi implicano sempre anche l'esistenza di una corrente i (detta **corrente di spostamento**).

BIBLIOGRAFIA

- Caforio – Ferilli : Fisica – Ed. Mondadori
- Amaldi : Corso di fisica – Ed. Zanichelli
- Marion : La fisica e l’universo fisico – Ed. Zanichelli
- Tipler : Invito alla fisica – Ed. Zanichelli
- Halliday – Resnick : Fondamenti di fisica – Ed. Zanichelli